KTH Matematik

5B1116 Matematik 2

14 November, 2006

Contents

1. Kontinuerliga funktioner

Låt $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^n$ vara en funktion och $\vec{a} \in D$.
Vi säger att f är **kontinuerlig i** $\vec{a}$ om:

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a}).$$

Observera att:

$$f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), ..., f_n(\vec{x})) \text{ kontinuerlig} \Leftrightarrow f_i(\vec{x}) \text{ kontinuerlig för all } i = 1..., n$$

$$f \text{ kontinuerlig och } D \text{ kompakt} \Rightarrow f \text{ har ett största och minsta värde}$$

2. Derivatan i en variabel.

Låt $y = f(x)$ vara en funktion i en variabel. Man definierar derivatan i punkten $x = a$ som

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{1}$$

På likande set säger man att f har derivatan i a om det existerar $A(= f'(a))$ och en funktion $\delta(h)$ med $\lim_{h\to 0} \delta(h) = 0$, så att:

$$f(a+h) - f(a) = Ah + h\delta(h) \tag{2}$$

Derivatan $f'(a)$ är riktningen av linjen som är tangent till grafen $y = f(x)$ i punkten $(a, f(a))$. Ekvationen av tangenten är:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

3. Partiella derivator

Den följande generalizerar (**??**) Låt $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^n$ vara en funktion. Den partiella derivata med avseende till variabel x_i i punkten $(a_1, ..., a_n) = \vec{a} \in D$ definieras (när lim existerar) som

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, ..., a_i + h, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_n)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{e}_i) - f(\vec{a})}{h}$$

Låt $f : D \to \mathbb{R}^k, D \subset \mathbb{R}$ vara en funktion och $\vec{a}$ en inrepunkt av D.

- Vi säger att f är **partiellt derivarbar med avseende till** x_i i $\vec{a}$ om $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existerar.
- Vi säger att f är **partiellt derivarbar** i $\vec{a}$ om $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ existerar för $i = 1, ..., n$.

- Vi säger att f är **partiellt derivarbar** om f är **partiellt derivarbar** i $\vec{a}$ för alla $a \in D$.

Observera att om f är partiellt derivarbar då måste D vara öppen.

4. Differentierbara funktioner

Den följande generalizerar (**??**). Låt $f : D \to \mathbb{R}^k, D \subset \mathbb{R}$ vara en funktion och $\vec{a}$ vara en inrepunkt till D.

Vi säger att f är **differentierbar i** $\vec{a}$ om det finns $A_1, ..., A_k \in \mathbb{R}$ och en funktion $\delta(\vec{h})$ i n variabler $\vec{h} = (h_1, ..., h_n)$ med $\lim_(\vec{h} \to \vec{0}) = 0$ så att

$$f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) = h_1 A_1 + ... + h_n A_n + (\sqrt{h_1^2 + ... + h_n^2})\delta(\vec{h}).$$

Vi säger att f är **differentierbar** om f är differentierbar i $\vec{a}$ för alla $a \in D$.

Observera att:

$$\begin{array}{lcc} f \text{ differentierbar} & \Rightarrow & f \text{ partiellt derivarbar med } \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = A_i \\ f \text{ differentierbar} & \Rightarrow & f \text{ kontinuerlig} \end{array}$$