KTH Matematik

5B1116 Matematik 2

15 November, 2006

Contents

1. Geometrisk tolkning av partiella derivator

Kom ihåg att derivatan $f'(a)$ är riktningen av linjen som är tangent till grafen $y = f(x)$ i punkten $(a, f(a))$. Ekvationen av tangenten är:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

P liknande sätt visar man att om $f(x, y)$ är en funktion itvå variabler, då är det *tangenta* planet till ytan $z = f(x, y)$ i punkten $(a, b, f(a, b))$:

$$z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b)$$

2. $C^1(D)$

Låt $D \subset \mathbb{R}^n$ vara en öppen mängd och $f : D \to \mathbb{R}$ en reellvärd funktion. Vi säger att f är av class $C^1(D)$ ($f \in C^1(D)$) om

- f är partiellt deriverbar.
- alla partiella derivator är kontinuerliga.

Observera att:

$$f \in C^1(D) \;\Rightarrow\; f \text{ är differentierbar}$$

3. Kedjeregel

Kom ihåg att för en sammansattning av två funktioner i en variabel far vi att:

$$(f \circ g)'(t) = f'(g(t))g'(t).$$

Vi ska generalizera det.

- Först betraktar vi fallet av två funktioner:

$$\mathbb{R}^n \to^g \mathbb{R} \to^f \mathbb{R}$$

  Kedjeregeln ger:

$$\frac{\partial (f \circ g)}{\partial x_i}(\vec{x}) = f'(g(\vec{x}))\frac{\partial g}{\partial x_i}g(\vec{x}).$$

- Betrakta nu fallet:

$$\mathbb{R} \to^g \mathbb{R}^n \to^f \mathbb{R}$$

  Antag att f är differentierbar och $g(t) = (g_1(t), ..., g_n(t))$ där $g_i(x)$ är derivarbara funktioner för $a < t < b$. Då har vi att:
  - $f \circ g$ är deriverbar i $a < t < b$.
  - $(f \circ g)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(g(t))g_1'(t) + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(g(t))g_n'(t)$.
- Betrakta nu det allmänna fallet:

$$\mathbb{R}^p \to^g \mathbb{R}^n \to^f \mathbb{R}$$

  där $g(\vec{t}) = (x_i(\vec{t}), ..., x_n(\vec{t})), f(x_1, ..., x_n)$. Vi har att:

$$\frac{\partial(f \circ g)}{\partial t_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(g(\vec{t}))\frac{\partial x_1}{\partial t_i}(\vec{t}) + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(g(\vec{t}))\frac{\partial x_n}{\partial t_i}(\vec{t})$$