KTH Matematik

5B1116 Matematik 2

14 November, 2006

Contents

1. Gradient

Låt $f(\vec{x}) = f(x_1, ..., x_n)$ vara en differentierbar funktion, definerad på en öppen $D \subset \mathbb{R}^n$. **Gradienten** till f i $\vec{a} \in D$ är vektorn

$$\nabla_f = grad\, f(\vec{a}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})) \in \mathbb{R}^n.$$

Vi har att

$$f \in C^1(D) \text{ och } \nabla_f = \vec{0} \;\Rightarrow\; f \text{ kostant i } D$$

Geometriskt:

2 variabler: om $f \in C^1(D)$ med $\nabla_f(a,b) \neq (0,0)$ då är $\nabla_f(a,b)$ en normal vektor till den nivå kurvan som går genom punkten (a,b).

3 variabler: om $f \in C^1(D)$ med $\nabla_f(a,b,c) \neq (0,0,0)$ då är $\nabla_f(a,b,c)$ en normal vektor till den nivå ytan som går genom punkten (a,b,c).

Det följer att:

2 variabler: linjen som är tangent till den nivå kurvan $f(x,y) = k$, genom (a,b) har ekvation:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) = 0.$$

3 variabler: planet som är tangent till den nivå ytan $f(x,y,z) = k$, genom (a,b,c) har ekvation:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)(y-b) + \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)(z-c) = 0.$$

2. Partiella derivator av högre ordning.

Man kan definiera partiella derivator av order $2, 3, ...$ genom att ta derivatan av en derivata:

$$f'_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})$$
$$f'_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})$$
$$f'_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$$
$$f'_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$$

och så vidare.

Låt $f : D \to \mathbb{R}$, där D är öppen. Vi säger att f är av klass C^k och skriver $f \in C^k(D)$ om

- alla partiella derivator av ordning mindre eller lika med k existerar.
- de är kontinuerliga

Vi far att:

$$f \in C^2(D) \;\; \Rightarrow \;\; \tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \tfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

3. Partiella differentialekvationer

En ekvation dom innehåller partiella derivator kallas en partiell-differentialekvation. Ofta kan man lösa partiella differentialeknationer med hjälp av koordinatbyte (variabelbyte). Flera exempel finns i boken.