KTH Matematik

5B1116 Matematik 2

21 November, 2006

Contents

1. Ortogonala matriser

Definition 1.1. En $n \times n$ matris A säges vara ortogonal om

$$A^T A = I_n.$$

Observera att:

- Om A ortogonal då är A^T ortogonal.
- $$\begin{array}{ccc} A \text{ är ortogonal} & \Leftrightarrow & \text{kolonnerna avgör en ON bas till } \mathbb{R}^n \\ A \text{ är ortogonal} & \Leftrightarrow & \text{raderna avgör en ON bas till } \mathbb{R}^n \end{array}$$
- $$A \text{ är ortogonal} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = A^T.$$
- $$A \text{ är ortogonal} \quad \Rightarrow \quad \det(A) = 1 \text{ eller } \det(A) = -1.$$

2. Basbyte

Låt $B_1 = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ och $B_2 = (\vec{e}'_1, ..., \vec{e}'_n)$ vara två olika baser till $\mathbb{R}^n$. Vi definierar den basbytematris (*från* B_1 *till* B_2) som

$$\mathcal{B}_{B_1}^{B_2} = (a_{ij})$$

där kolonnerna är

$$(\vec{e}_i)_{B_2} = (a_{1i}, a_{2i}, ..., a_{ni}) :$$

$$\mathcal{B}_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} (\vec{e}_1)_{B_2} & (\vec{e}_2)_{B_2} & ... & (\vec{e}_n)_{B_2} \\ ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}$$

Då är:

$$(\vec{v})_{B_2} = \mathcal{B}_{1\,B_1}^{B_2} (\vec{v})_{B_1}.$$

Det betyder att om $(\vec{v})_{B_1} = (x_1, ..., x_n)$ och $(\vec{v})_{B_2} = (x'_1, ..., x'_n)$ då är:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ ... \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\vec{e}_1)_{B_2} & (\vec{e}_2)_{B_2} & ... & (\vec{e}_n)_{B_2} \\ ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

Observera att

- $(\mathcal{B}_{B_1}^{B_2})^{-1} = \mathcal{B}_{B_2}^{B_1}$.
- om B_1 och B_2 är ortogonala baser då är $\mathcal{B}_{B_1}^{B_2}$ ortogonal.
  I så fall är $(\mathcal{B}_{B_1}^{B_2})^{-1} = (\mathcal{B}_{B_2}^{B_1})^T$.

3. Basbyte och linjära avbildningar

Låt $B_1 = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ och $B_2 = (\vec{e}'_1, ..., \vec{e}'_n)$ vara två olika baser till $\mathbb{R}^n$ och låt $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning. Då har vi att:

$$[F]_{B_2} = \mathcal{B}_{B_1}^{B_2}[F]_{B_1}\mathcal{B}_{B_2}^{B_1}.$$