KTH Matematik

5B1116 Matematik 2

22 November, 2006

Contents

1. Diagonala matriser

Definition 1.1. En $n \times n$ matris $D = (d_{ij})$ säges vara *diagonal* om

$$d_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & \text{om} \quad i = j \\ 0 & \text{om} \quad i \neq j \end{cases}$$

d.v.s

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

2. Egenvärden och egenvektorer

Definition 2.1. Låt A ara en $n \times n$ matris. En vektor $\vec{0} \neq \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ är en *egenvektor* till A om det finns $\lambda \in \mathbb{R}$ sådan att:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

talet λ kallas *egenvärde* till A.

Observera att:

$$\lambda \text{ är egenvärde till } A \ \text{ om } \ \det(A - \lambda I_n) = 0$$

$$\vec{v} = (x_1, ..., x_n) \text{ är egenvektor till } A \text{ med avseende till } \lambda \text{ om } (A - \lambda I_n)\vec{v} = \vec{0}$$

Det vill säga att $\vec{v}$ är en ej trivial lösning till linjärt systemet:

$$(A - \lambda I_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Diagonaliserbara matriser

Låt A vara en $n \times n$ matris. Vi säger att A är *diagonaliserbar* om det finns ett basbyte $\mathcal{B}_{B_1}^{B_2}$ och en diagonal matris D sådana att:

$$D = \mathcal{B}_{B_1}^{B_2} \, A \, \mathcal{B}_{B_2}^{B_1} = (\mathcal{B}_{B_2}^{B_1})^{-1} A \, \mathcal{B}_{B_2}^{B_1}.$$

Observera att:

$$A \text{ är diagonaliserbar } \Leftrightarrow A \text{ har } n \text{ stycken linjärt oberoende egenvektorer}$$

Låt $B_2 = (\vec{v}_1)_{B_1}, ..., (\vec{v}_n)_{B_1}$ vara basen som består av egenvektorer och antar att v_i är egenvektor med avseende till λ_i(det kan vara så att $\lambda_i = \lambda_j$ för någon i, j). Då är

$$\mathcal{B}_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} (\vec{v}_1)_{B_1} & ... & (\vec{v}_n)_{B_1} \\ ... & ... & ... \\ ... & ... & ... \end{pmatrix} \text{ och } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Observera dessutom att:

Om $\vec{v_1}, ..., \vec{v_k}$ är egenvektorer till olika egenvärden $\lambda_1 \neq ... \neq \lambda_k$ då är de linjärt oberoende. Det följer att:

$$\begin{array}{c} A \;\; n \times n \text{ matris med} \\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq ... \neq \lambda_n \text{ egenvärde} \end{array} \quad \Rightarrow \quad A \text{ är diagonaliserbar}$$