KTH Matematik

5B1116 Matematik 2

23 November, 2006

Contents

1. Symmetriska matriser

Definition 1.1. En $n \times n$ matris $A = (a_{ij})$ säges vara *symmetrisk* om

$$A^T = A \text{ d.v.s } a_{ij} = a_{ij}.$$

En vikgtig egenskap hos summetriska matriser är att:

$$A \text{ symmetrisk } \Rightarrow \det(A - \lambda I_n) \text{ har bara reela roter.}$$

Det fljande kallas *Spektral sats*:
Låt A vara en $n \times n$ symmetrisk matris. Då gäller följande:

(1) Två egenvektorer till A, som motsvarar två olika egenvärden, är ortogonala.
(2) Om $\det(A - \lambda I_n) = (\lambda - a)^m P(\lambda)$, där $P(\lambda)$ är ett polynom af grad $n - m$, så kan man bestämma m stycken ortogonala egenvektorer.
(3) Man kan bestämma en ON bas till $\mathbb{R}^n$, som består av egenvektorer till A.

2. Ortogonalt diagonaliserbara matriser

Låt A vara en $n \times n$ matris. Vi säger att A är *ortogonalt diagonaliserbar* om det finns ett basbyte $\mathcal{B}_{B_1}^{B_2}$, där B_2 är en ON bas av egenvektorer, och en diagonal matris D sådana att:

$$D = \mathcal{B}_{B_1}^{B_2} A \mathcal{B}_{B_2}^{B_1} = (\mathcal{B}_{B_2}^{B_1})^{-1} A \mathcal{B}_{B_2}^{B_1}.$$

Observera att:

$$A \text{ är ortogonalt diagonaliserbar } \Leftrightarrow \mathcal{B}_{B_1}^{B_2} \text{ är en ortogonal matris}$$

$$A \text{ är ortogonalt diagonaliserbar } \Leftrightarrow A \text{ är symmetrisk}$$

3. Kvadratiska former

Definition 3.1. En *kvadratisk form* $Q(x_1, ..., x_n)$ är en summa av andra grader termer.

$$Q(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2.$$
$$Q(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz.$$

Låt

$$A_Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, A_Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

då är

$$Q(x,y) = (x,y)A_Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, Q(x,y,x) = (x,y,x)A_Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}$$

Eftersom A_Q är symmetrisk, kam man hitta en bas byte till en ON bas så att i de nya koordinater (x', y', z') kan man skriva:

$$Q(x', y') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2, Q(x', y', z') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2.$$

Detta kallas *kanoniska form* till Q.