KTH Matematik

5B1116 Matematik 2

27 November, 2006

Contents

1. Andragradsytor i $\mathbb{R}^3$

En andragradsyta i $\mathbb{R}^3$ bestå alla lösnngar till en ekvation av grad 2 :

$$Y(x,y,z) = a_{11}x_1^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yx + Ax + By + Cz + T = 0.$$

I boken, 250-251, finns en lista av alla typer av andragradsytor i den *kanoniska form*.

2. Den Kanoniska formen

Man skriver $Y(x,y,z)$ p{aa kanonisk form genom att byta koordinater i två steg:

(1) Man kan byta koordinater sådan att $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$. Detta gör man genom att ortogonalt diagonalisera den kvadratiska formen $Q(x,y,z)$ där

$$K(x,y) = Q(x,y) + Ax + By + Cz + T = 0.$$

Så genom att byta till en normerad bas av egenvektorer, kan man skriva

$$Y(x',y',z') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + A'x' + B'y' + C'z' + T = 0.$$

(2) Man kan komplettera kvadraterna, när $\lambda_i \neq 0$:

$$Y(x',y',z') = \lambda_1(x' + \frac{A}{2\lambda_1})^2 + \lambda_2(y' + \frac{B}{2\lambda_2})^2 + \lambda_3(z' + \frac{C}{2\lambda_3})^2 + (T - \lambda_1(\frac{A}{2\lambda_1})^2 - \lambda_2(\frac{B}{2\lambda_2})^2) - \lambda_3(\frac{B}{2\lambda_3})^2$$

Detta ger den kanoniska formen, när $\lambda_i \neq 0$:

$$K(x'',y',z''') = \lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 + (T - \lambda_1(\frac{A}{2\lambda_1})^2 - \lambda_2(\frac{B}{2\lambda_2})^2) - \lambda_3(\frac{B}{2\lambda_3})^2) = 0$$

3. KURVOR I $\mathbb{R}^n$

En kurva i $\mathbb{R}^n$ kan man beskriva i parametrisk form:

$$K(t) = (x_1(t), ..., x_n(t)).$$

till exempel när avbildningen är linjär då är kurvan en linje.

Derivatan av funktionen brukar vi beteckna med:

$$K'(t) = (x'_1(t), ..., x'_n(t)).$$

Låt $P = (x_(t_0), ..., x_n(t_0))$ vara en punkt på kurvan. Då är tangent linjen till kurvan i punkten P:

$$T(t) = K(t_0) + tK'(t_0).$$

4. YTOR I $\mathbb{R}^n$

Ytor i $\mathbb{R}^n$ ges på parametrisk form:

$$Y(s,t) = (x_1(s,t), ..., x_n(s,t)).$$

till exempel när avbildningen är linjär då är ytan ett plan.

Ytan spänns upp av två familjer av kurvor, för varje $(s_0, t_0 t_) \in \mathbb{R}^2$ ::

$$Y(s_0,t) = (x_1(s_0,t), ..., x_n(s_0,t)) \;\; Y(s,t_0) = (x_1(s,t_0), ..., x_n(s,t_0)).$$

Derivatan av kurvorna ger tangent linjer i två riktningar:

$$\vec{Y}'_t(s_0,t) = (x'_1(s_0,t), ..., x'_n(s_0,t)) \;\; \vec{Y}'_s(s,t_0) = (x'_1(s,t_0), ..., x'_n(s,t_0)).$$

Låt $P = (x_1(s_0,t_0), ..., x_n(s_0,t_0))$ vara en punkt på ytan. Då är normal riktningen till ytan(till tangent olanet) i punkten P:

$$\vec{Y}'_t(s_0,t_0) \times \vec{Y}'_s(s_0,t_0)$$