KTH Matematik

5B1116 Matematik 2

28 November, 2006

Contents

1. Taylors formel

Låt $f(x,y) \in C^3(D)$, där D är en oppen mängd i $\mathbb{R}^2$. Antag att punkten (a,b) tillhör D. Då är:

$$\begin{aligned} f(a+h,a+k) = & \quad f(a,b) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)h + \tfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)k + \\ & + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)h^2 + 2\tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)hk + \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)k^2\right) + (h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}\gamma(h,k). \end{aligned}$$

där $\gamma(h,k)$ är en begränsad funktion i en omgivning av origo.

Detta generaliseras till $f(x)$, där $x = (x_1, ..., x_n)$. Låt $h = (h_1, ..., h_n)$, och $a = (a_1, ..., a_n)$.

$$\begin{aligned} f(a+h) = & \quad f(a) + \tfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + ... + \tfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n + \\ & + \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i,j=1}^{n}\left(\tfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)h_i h_j\right) + |h|^3 B(h). \end{aligned}$$

där $B(h)$ är en begränsad funktion i en omgivning av origo.

2. Lokala extrempunkter

Låt $f : D \to \mathbb{R}^n$ vara en funktion och $a \in D$.

- Vi säger att a är ett **lokalt maximum** (och $f(a)$ en **lokal maximipunkt**) om det finns $K(a,\delta)$ sodant att:
$$f(x) \leq f(a) \text{ för varje } x \in K(a,\delta).$$
- Vi säger att a är ett **strängt lokalt maximum** (och $f(a)$ en **sträng lokal maximipunkt**) om det finns $K(a,\delta)$ sodant att:
$$f(x) < f(a) \text{ för varje } x \in K(a,\delta).$$
- Vi säger att a är ett **lokalt minimum** (och $f(a)$ en **lokal minimipunkt**) om det finns $K(a,\delta)$ sodant att:
$$f(x) \geq f(a) \text{ för varje } x \in K(a,\delta).$$

- Vi säger att a är ett **strängt lokalt minimum** (och $f(a)$ en **sträng lokal minimipunkt**) om det finns $K(a, \delta)$ sodant att:

$$f(x) > f(a) \text{ för varje } x \in K(a, \delta).$$

Sådana punkter kallas *lokala extrempunkter.*

3. Stationära punkter

Man ser att

om f är differentierbar och $a \in D$ är extrempunkt $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \; i = 1, ..., n.$

Vi kallar a en **stationär punkt** om $\nabla_f(a) = (0, ..., 0)$.

Det följer att:

Om $a \in D$ är extrempunk då är a stationär punkt!

INTE TVÄRTOM!

4. Lokal undersökning

För att hitta extrmpunkter till f börjar man med att bestämma stationära punkter till f.

Om a är en stationärpunkt, genom Taylors formeln, kan man approximera:

$$f(a + k) - f(a) = \frac{1}{2}Q(h)$$

där Q är en kvadratisk form i variabler $h = h_1, ..., h_n$. Vi säger att Q är:

- **positivt definit** om $Q(h) > 0$ för alla $h \neq (0, ..., 0)$. I sådant fall är a ett bf strängt lokalt minimum .
- **negativt definit** om $Q(h) < 0$ för alla $h \neq (0, ..., 0)$. I sådant fall är a ett **strängt lokalt maximum** .
- **indefinit** om $Q(h)$ antar positiva och negativa tal. I sådant fall är a ett **sadelpunkt** .
- **positivt semidefinit** om $Q(h) \geq 0$ för alla $h \neq (0, ..., 0)$ och $Q(h) = (0, 0)$ för någon $h \neq (0, ..., 0)$I sådant fall ska man utväkla vidare.
- **negativt semidefinit** om $Q(h) \leq 0$ för alla $h \neq (0, ..., 0)$ och $Q(h) = (0, 0)$ för någon $h \neq (0, ..., 0)$I sådant fall ska man utväkla vidare.