KTH Matematik

5B1116 Matematik 2

3 November, 2006

Contents

1. Matriser

Låt n, n vara positiva tal. Med en matris av tym $m \times n$ menas ett schema av reella tal:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Vi säger att två matriser av samma typ $A = (a_{ij})$ och $B = (b_{ij})$ är lika om $a_{ij} = b_{ij}$ för alla i, j.

Vi betecknar med 0 matrisen med alla termer lika med noll. Vi betecknar med I_n (*enhetsmatris*) den matris av typ $n \times n$ med 1 på diagonalen och 0 som alla andra termer:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}, \; I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

En matris av typ $n \times n$ kallas en *kvadratisk matris.*

2. Operationer med matriser

- Om $A = (a_{ij}, B = (b_{ij}$ är matriser av samma typ, då definieras summan som:
$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$
Observera att: $A + B = B + A$ och $(A + B) + C = A + (B + C)$. Dessutom är $A + 0 = 0 + A = A$.
- Låt $k \in \mathbb{R}$ och $A = (a_{ij})$ vara en matris av typ $m \times n$, då kan man definiera matrisen kA av samma typ, som:
$$kA = (ka_{ij}).$$

Observera att:
- $k(A+B) = kA + kB$;
- $(k+h)A = kA + hA$;
- $(kh)A = (hk)A = k(hA)$;
- $1A = A, 0A = 0$.

Vi definierar:

$$-A = (-1)A, \text{ och } A - B := A + (-1)B.$$

- Låt $A = (a_{ij})$ vara en $m \times n$ matris. Den transponerad matris defineras som
$$A^T = (a_{ji}).$$
"Rader av A blir kolunner av A^T."
Det gäller att $(A+B)^T = A^T + B^T$ och $(kA)^T = kA^T$.

3. Geometrisk Tolkning

En 3×1 matris

$$v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

kan man tänka på som en vektor $\vec{v} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$. Observera att additionen av två vektorer eller multiplicationen med en skalär motsvarar additionen eller multiplicationen med en skalär av motsvarande matriser. Observera att $v^T = (a_1, a_2, a_3)$.

Man kan svriva en linje genom (a_1, a_2, a_3) och parallel till (b_1, b_2, b_3) p matris form som:

$$l : \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

4. Produkt av matriser

- Låt
$$A^T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix}$$
och
$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$$
då är produkten
$$A^T B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} = a_q b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n \in \mathbb{R}$$

- Låt A vara en $m \times n$ matris och B vara en $n \times k$ matris:
$$A = \begin{pmatrix} A_1^T \\ A_2^T \\ ... \\ A_m^T \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & ... & B_k \end{pmatrix}$$
Matrisen AB definieras som den $m \times k$ matris:
$$AB = \begin{pmatrix} A_1^T B_1 & A_1^T B_2 & ... & A_1^T B_k \\ A_2^T B_1 & A_2^T B_2 & ... & A_2^T B_k \\ ... & ... & ... & \\ A_m^T B_1 & A_m^T B_2 & ... & A_m^T B_k \end{pmatrix}$$

Observera att:

- Det kan vara så att $AB \neq BA$.
- $A(BC) = (AB)C$.
- $A(B + C) = AB + AC, (A + B)C = AC + AB$.
- $(AB)^T = B^T A^T$.
- Låt A vara en $n \times n$ matris. Det gäller att
$$AI_n = I_n A = A.$$