KTH Matematik

5B1116 Matematik 2

30 November, 2006

Contents

1. Differentialer

Låt $f(x_1, ..., x_n)$ vara en differenterbar funktion. Taylors utvekling av grad en ger:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)h_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)h_n + R(x,h).$$

där $R(x,h) \to 0$ när $h \to 0$. Vi kallar **differentialen** av f i punkt x, funktionen:

$$df(x) : (h_1, ..., h_n) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)h_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)h_n.$$

Så man kan approximera funktionen, i en omgivning av en punkt x, som:

$$f(x+h) = f(x) + df(x)(h) + R(x,h).$$

Låt f vara en funktion av två variabler, i.e. $x = (x_1, x_2)$. Om man approximerar $f(x+h) - f(x)$ med $df(x)(h)$, geometriskt betyder det att man erkätter ytan $z = f(x)$, i en omgivning av x, med tangent planet till $z = f(x)$ i punken $(x, f(x))$.

2. Funktionalmatris

Låt $f : D \to \mathbb{R}^m$ en funktion i $C^1(D)$, där $D \subset \mathbb{R}^n$. Då är:

$$f(x_1, ..., x_n) = (f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n))\ f_i \in C^1(D)$$

Man definerar den **funktionalmatrisen**, $f'(x)$ av f (som motsvarar derivatan i en variabel) som den $m \times n$ matrisen vars rader består av gradienterna $\nabla_{f_i}(x)$:

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & ... & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & ... & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

3. Linjarisering

Med hjälp av $f'(x)$ kan man linjarisera en sådan f, i en omgivning av en punkt x:

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + |h|\gamma(h) = \begin{pmatrix} \nabla_{f_1}(x) \\ \nabla_{f_2}(x) \\ ... \\ \nabla_{f_m}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ ... \\ h_n \end{pmatrix} + |h| \begin{pmatrix} \gamma_1(h) \\ \gamma_2(h) \\ ... \\ \gamma_n(h) \end{pmatrix}$$

4. Kedjeregeln

Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$ vara två differentiala funktioner: Då har man att:

$$(g \circ f)' = g' \cdot f'.$$