KTH Matematik

5B1116 Matematik 2

6 November, 2006

Contents

1. Invers till en kvadratisk matris 1
2. Hur bestämmer man inversen 1
3. Linjära system på matris form 1

1. Invers till en kvadratisk matris

Låt A vara en $n \times n$ matris. En invers till A är en $n \times n$ matris B sådan att

$$AB = BA = I_n.$$

För varje kvadratisk matris A finns det högst en invers, som beteckas med A^{-1}.
En matris A säges *inverterbar* om inversen A^{-1} existerar.
Observera att:

- $(A^{-1})^{-1} = A$, d.v.s att om A är inverterbar, så är A^{-1}.
- $(kA^{-1})^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$, d.v.s att om A är inverterbar, så är kA^{-1}, för varje $k \neq 0$.
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, d.v.s att om A är inverterbar, så är A^T.
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, d.v.s att om A, B är inverterbara, så är AB.

2. Hur bestämmer man inversen

Låt A vara en $n \times n$ inverterbar matris och låt

$$A' = \begin{pmatrix} A & I_n \end{pmatrix} \text{ den är en } n \times (2n) \text{ matris}$$

Genom Gauss-Jordan eliminering får man:

$$A' = \begin{pmatrix} A & I_n \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} I_n & A^{-1} \end{pmatrix}$$

3. Linjära system på matris form

Låt

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n} & = & d_1 \\ a_{21}x_1 + ... + a_{2n} & = & d_2 \\ a_{31}x_1 + ... + a_{3n} & = & d_3 \\ ... & = & ... \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn} & = & d_m \end{cases} \text{ vara ett system av } m \text{ ekvationer in } n \text{ variabler.}$$

Om man sätter:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ ... \\ d_n \end{pmatrix}$$

då kan man skriva systemet som:

$$MX = D.$$

Observera att om M är inverterbar då har systemet precis en lösning:

$$X = M^{-1}D.$$

Ett system kallas ett *homogent* system om $D = 0$.
Om ett homogent system $MX = 0$ är så att M är inverterbar då har systemet precis en lösningm nämlingen den triviella lösningen $X = 0$.