KTH Matematik

5B1116 Matematik 2

7 November, 2006

Contents

1. Rummen $\mathbb{R}^n$

Med $\mathbb{R}^n$ menas mängden av n-tupler $\vec{v} = (x_1, ..., x_n)$, där $x_i \in \mathbb{R}$.
Man kan definiera de f¨ljande tre operationer:

- $(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$.
- $k(x_1, x_2, ..., x_n) = (kx_1k, x_2, ..., kx_n)$.
- $(x_1, x_2, ..., x_n) \cdot (y_1, y_2, ..., y_n) = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$.

Dessutom definierar man:

- $|\vec{v}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$.
- $\vec{v}$ är parallel till $\vec{w}$ om det finns $k \in \mathbb{R}$ så att $\vec{w} = k\vec{v}$.
- Vinkeln α mellan $\vec{v}$ och $\vec{w}$ är:

$$arccos(\frac{\vec{v}\vec{w}}{|\vec{v}||\vec{w}|}).$$

  så är $\vec{v}$ ortogonal till $\vec{w}$ om $v \cdot w = 0$.

Vi betecknar med: $\vec{0} = (0, 0, 0, ..., 0)$ och $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 1)$ med ett på plats nummer i.

Observara att man har samma räknereglerna som gäller för $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$.

- $\vec{u} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{u}$.
- $(\vec{u} + \vec{w}) + \vec{u} = \vec{u} + (\vec{w} + \vec{u})$.
- $k(\vec{u} + \vec{w}) = k\vec{u} + k\vec{w}$.
- $(k + t)\vec{v} = k\vec{v} + t\vec{v}$.
- $k(t\vec{v}) = kt\vec{v}$.
- $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$.
- $k(\vec{v} \cdot \vec{u}) = (k\vec{v}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot (k\vec{u})$.
- $(\vec{v} + \vec{w}) \cdot u = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{u}$.
- $|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq |\vec{v}||\vec{w}|$.
- $|\vec{v} + \vec{w}| \leq |\vec{v}| + |\vec{w}|$, de är lika om och endast om $\vec{v}$ är parallel till $\vec{w}$.

2. Baser till $\mathbb{R}^n$.

Vi säger att en vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ är en linjär kombination av vektorerna $\vec{v_1}, ..., \vec{v_m}$ om det finns $k_1, ..., k_m \in \mathbb{R}$, sådana att:

$$\vec{v} = k_1\vec{v_1} + k_2\vec{v_2} + .. + k_m\vec{v_m}.$$

Ett antal vektorer $\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_m}\}$ sägs *linjärt oberoende* om ingen av dem är en linjär kombination av de övriga.

Man ser att $\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_m}\}$ är linjärt oberoende om och endast om det homogent system $MK = 0$, där M är matrisen vars kolunner består av koordinaterna av $\vec{v_1}, ..., \vec{v_m}$ och $K = (k_1, ..., k_n)$, har bara den triviella lösning.

Det vill säga att $\{\vec{v_1}, ..., \vec{v_m}\}$ är linjärt oberoende om och endast om det följande händer:

$$k_1\vec{v_1} + ... + k_m\vec{v_m} = 0 \Leftrightarrow k_1 = k_2 = ... = k_m = 0.$$

Definition 2.1. En *bas* till $\mathbb{R}^n$ är en mängd av n stycken linjärt oberoende vektorer.

Given en bas $B = \{\vec{v_1}, ..., \vec{v_m}\}$ då kan varje vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ skrivas som en linjär kombination:

$$\vec{v} = k_1\vec{v_1} + ... + k_m\vec{v_m} = 0 \Leftrightarrow k_1$$

Vi kallar $(k_1, k_2, ..., k_m)$ koordinater av vektorn $\vec{v}$ med avseende till basen B och vi skriver:

$$\vec{v} = (k_1, k_2, ..., k_m)_B.$$