KTH Matematik

5B1116 Matematik 2

8 November, 2006

Contents

1. Linjära avbildningar

En avbildning $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sägs linjär om:

(1) $F(\vec{v} + \vec{w}) = F(\vec{v}) + F(\vec{w})$ för alla $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$.

(2) $F(k\vec{v}) = kF(\vec{v})$, för alla $v \in \mathbb{R}^n$ och $k \in \mathbb{R}$.

Det innebär att $F(\vec{0}) = \vec{0}$.

Låt $B = \{e_1, ..., e_n\}$ vara en bas till $\mathbb{R}^n$ och $B' = \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m\}$ en bas till $\mathbb{R}^m$, så att $F(e_1) = (a_{11}, a_{21}, ..., a_{m1})_{B'}, ..., F(e_n) = (a_{1n}, a_{2n}, ..., a_{mn})_{B'}$. Man definierar matrisen av F med avseende till B (och B') som den $m \times n$ matris vars kolunn nummer i består av koordinaterna av $F(e_i)$:

$$[F]_B = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} F(e_1) & F(e_2) & ... & F(e_n) \\ - & - & ... & - \\ - & - & ... & - \\ ... & ... & ... & .. \\ - & - & ... & - \end{pmatrix}$$

Bilden av en punkt $(x_1, ..., x_n)$ beräknas av:

$$F(x_1, ..., x_n) = \begin{pmatrix} F(e_1) & F(e_2) & ... & F(e_n) \\ - & - & ... & - \\ - & - & ... & - \\ ... & ... & ... & .. \\ - & - & ... & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$$

2. Determinant

Determinanten är ett tal som man ordnar till en kvadratisk matris:

$$\det(A) \in \mathbb{R}.$$

Låt A vara en $n \times n$ matris. Vi betecknar ned A_{ik} den $(n-1) \times (n-1)$ matris som man får genom att ta bort rad nummer i och kolonn nummer k från A.

Definition 2.1. Låt $A = (a_{ij})$ vara en $n \times n$ matris. Vi definierar $\det(A)$ som:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A_{ik}).$$

Till example om $i = 1$ (vi fixar den första raden) då är:

$$\det(A) = a_{11} \det(A_1) - a_{12} \det(A_{12}) + a_{13} \det(A_{13}) - .... + (-1)^{1+n} \det(A_{in}).$$

Några egenskaper hos determinanten är:

- $\det(A^T) = \det(A)$.
- Om alla termer i en viss rad (komonn) moltiplieceras med k, så moltipliceras matris determinanten.
- $\det(kA) = k^n \det(A)$, där A är en $n \times n$ matris.
- Om man låter två rader (kolunner) byta plats, så byter determinanten tecken.
- Om två rader är lika så är determinanten noll.
- $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.
- Om $\det(A) \neq 0$ då är A inverterbar med $[A^{-1}]_{ik} = (-1)^{i+k} \frac{\det(A_{ki})}{\det(A)}$, och $\det(A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}$.

Det gäller att:

$$A \text{ är inverterbar} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0.$$

Detta innebär att vi har två ekvivalenta metoder för att bestämma om en kvadratisk linjärt system har precis en lösning: Låt A vara en $n \times n$ matris:

$$\textsc{cramer regel}\ A\vec{x} = \vec{D} \text{ har precis en lösning } \Leftrightarrow \det(A) \neq 0.$$

$$A\vec{x} = \vec{D} \text{ har precis en lösning } \Leftrightarrow A \text{ är inverterbar.}$$