KTH Matematik

5B1116 Matematik 2

1 December, 2006

Contents

1. Funktionaldeterminant

Låt $f(x_1, ..., x_n)$ vara en differenterbar funktion. Talet

$$|\frac{df}{dx}| = \det(f'(x)) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & ... & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & ... & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

kallas fär **funktionaldeterminanten** eller Jacobi determinant.

2. Funktionaldeterminant och sammansättning

Låt $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$ vara två differentiala funktioner: Då har man att:

$$det((f \circ g)'(x)) = det(f'(x))det(g'(x))$$

$$|\frac{d(f \circ g)}{dx})| = |\frac{df}{dt}||\frac{dt}{dx}|$$

3. Inversfunktionssats

Låt $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \in \mathbb{R}^n$, vara en funktion. En invers till f är en function

$$f^{-1} : f(D) \to D$$

sådan att $f \circ f^{-1} = id_D, f^{-1} \circ f = id_{f(D)}$. The funktion $id_A : A \to A$ definieras som $id_A(x) = x$ för alla $x \in A$.

Theorem 3.1. *(Inversfunktionsats)*
Låt $f : D \to \mathbb{R}^n$ vara i $C^1(D)$, och $a \in D$ sådan att $\det(f'(a)) \neq 0$. Då finns öppna omgivningar U, V av a respektibe $f(a)$ dådana att $f : U \to V$ har en inver $f^{-1} \in C^1(U)$.

4. Implicit givna funktioner

Låt $f(x,y)$ vara en funktion av två variabler. Om nivåkrvan $f(x,y) = C$ har en lösning $y = y(x)$, d,v,s kurvan kan beskrivas som grafen av functionen $y(x)$, då säger vi att funktionen **implicit definierar** funktionen $y(x)$.

Theorem 4.1. *(Implicit funktionssats i två variabler)*
Låt $F(x,y) \in C^1(D)$, och låt (a,b) vara en punkt på nivåkurvan $F(x,y) = C$. Om

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$$

så finns en öppen omgivning U av (a,b) sådan att restriktionen av nivåkurvan till U implicit definerar en C^1 funktion $y = f(x)$, och

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}.$$

På likande sätt:

Theorem 4.2. *(Implicit funktionssats i tre variabler)*
Låt $F(x,y,z) \in C^1(D)$, och låt (a,b,c) vara en punkt på nivåkurvan $F(x,y,z) = C$. Om

$$\frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c) \neq 0$$

så finns en öppen omgivning U av (a,b,c) sådan att restriktionen av nivåkurvan till U implicit definerar en C^1 funktion $y = f(x,y)$, och

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,f(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,f(x,y))}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,f(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,f(x,y))}.$$