

CONTENTS

- | | |
|------------------------------|---|
| 1. Implicit givna funktioner | 1 |
| 2. Skärning av två nivåytor | 2 |

1. IMPLICIT GIVNA FUNKTIONER

Låt $f(x, y)$ vara en funktion av två variabler. Om nivåkurvan $f(x, y) = C$ har en lösning $y = y(x)$, d.v.s kurvan kan beskrivas som grafen av funktionen $y(x)$, då säger vi att funktionen **implicit definierar** funktionen $y(x)$.

Theorem 1.1. (*Implicit funktionssats i två variabler*)

Låt $F(x, y) \in C^1(D)$, och låt (a, b) vara en punkt på nivåkurvan $F(x, y) = C$. Om

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$$

så finns en öppen omgivning U av (a, b) sådan att restriktionen av nivåkurvan till U implicit definierar en C^1 funktion $y = f(x)$, och

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}.$$

På likande sätt:

Theorem 1.2. (*Implicit funktionssats i tre variabler*)

Låt $F(x, y, z) \in C^1(D)$, och låt (a, b, c) vara en punkt på nivåkurvan $F(x, y, z) = C$. Om

$$\frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) \neq 0$$

så finns en öppen omgivning U av (a, b, c) sådan att restriktionen av nivåkurvan till U implicit definierar en C^1 funktion $y = f(x, y)$, och

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, f(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, f(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))}.$$

2. SKÄRNING AV TVÅ NIVÅYTOR

Låt $F(x, y, z), G(x, y, z)$ vara två differentierbara funktioner och (a, b, c) vara en punkt på skärningen:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = C \\ G(x, y, z) = D \end{cases}$$

Om $\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(a, b, c) & \frac{\partial F}{\partial y}(a, b, c) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(a, b, c) & \frac{\partial G}{\partial y}(a, b, c) \end{pmatrix} \neq 0$

Då finns en omgivning av (a, b, c) i vilket systemet implicit definierar två funktioner av klass C^1 , $x = f(z), y = g(z)$, sådana att

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = t \end{cases} \text{ implicit parametriserar skärning kurvan.}$$