Institutionen för matematik, KTH
Gunnar Johnsson, Jan Kristoferson

Matematik II 2004-2005

Lösningar till tentamensskrivning, 2005-02-23, 5B1116 och 5B1136, Matematik II för E, ME, I och OPEN

1. Sätt $f(x,y,z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} - 5$. En normalvektor till ytan $f(x,y,z) = 0$ (= en normalvektor till tangentplanet) ges av gradientvektorn ∇f.
Vi finner $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) = (\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2}, \frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}, \frac{1}{x} - \frac{y}{z^2}) = (-\frac{7}{2}, 0, \frac{7}{8}) = \frac{7}{8}(-4,0,1)$ i punkten (1,2,4). Tangentplanets ekvation blir alltså $(-4)\cdot(x-1) + 0\cdot(y-2) + 1\cdot(z-4) = 0$, varav

Svar: $4x - z = 0$.

2. Vi löser systemet med elementära radoperationer:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 & | & 1 \\ 2 & 3 & 2 & | & 3 \\ 3 & 5 & 4 & | & 4 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 & | & 1 \\ 0 & -2 & -4 & | & 2 \\ 1 & 0 & -2 & | & 3 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 0 & 5 & 10 & | & -5 \\ 0 & -2 & -4 & | & 2 \\ 1 & 0 & -2 & | & 3 \end{bmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & | & -1 \\ 0 & -1 & -2 & | & 1 \\ 1 & 0 & -2 & | & 3 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 0 & -2 & | & 3 \end{bmatrix}$$

Om vi sätter $z = t$, så kan lösningen kan skrivas

Svar: $(x,y,z) = (3,-1,0) + t(2,-2,1)$.

3. Med hjälp av kedjeregeln fås $u'_x = \frac{\partial}{\partial x}(f(r)) = f'(r)\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = f'(r)\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = f'(r)\cdot\frac{x}{r}$.

Vidare får vi $u''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(f'(r)\cdot\frac{x}{r}) = \frac{\partial}{\partial x}(f'(r))\cdot\frac{x}{r} + f'(r)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{r}) = (f''(r)\cdot\frac{x}{r})\cdot\frac{x}{r} + f'(r)\cdot\frac{r\cdot 1 - x\frac{\partial r}{\partial x}}{r^2} = f''(r)\cdot\frac{x^2}{r^2} + f'(r)\cdot\frac{r - x\cdot\frac{x}{r}}{r^2} = f''(r)\cdot\frac{x^2}{r^2} + f'(r)\cdot\frac{r^2-x^2}{r^3}$.

Symmetrin med avseende på x och y ger $u''_{yy} = f''(r)\cdot\frac{y^2}{r^2} + f'(r)\cdot\frac{r^2-y^2}{r^3}$

Vi får därmed $u''_{xx} + u''_{yy} = f''(r)\cdot\frac{x^2+y^2}{r^2} + f'(r)\cdot\frac{2r^2-(x^2+y^2)}{r^3}$. Med användning av att $x^2+y^2 = r^2$ fås nu det önskade resultatet.

4. Karakteristiska ekvationen blir $\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$, vilket ger egenvärdena $\lambda_1 = 6$ och $\lambda_2 = 1$.

Motsvarande egenvektorer för $\lambda = 6$: vi får det homogena systemet med koefficientmatris $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$. Lösningarna blir $t\cdot(2,-1)$. En normerad egenvektor är $\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)$.
Motsvarande egenvektorer för $\lambda = 1$: vi får det homogena systemet med koefficientmatris $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Lösningarna blir $t\cdot(1,2)$. En normerad egenvektor är $\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$.

I den nya ON-basen $(e'_x, e'_y) = (\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1), \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2))$ får alltså kurvan ekvationen $6x'^2 + y'^2 = 1$. Vi får därmed

Svar: Kurvan är en ellips med huvudaxelriktningarna $(2,-1)$ och $(1,2)$ (och halvaxellängderna $\frac{1}{\sqrt{6}}$ respektive 1).

5. Stationära punkter ges av systemet $\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = y - \frac{1}{x^2} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = x - \frac{8}{y^2} = 0 \end{cases}$.

Den första ekvationen ger $y = \frac{1}{x^2}$. Insättning i den andra ekvationen ger $x - 8x^4 = 0$.
Eftersom $x \neq 0$ får vi $8x^3 = 1$, varav $x = \frac{1}{2}$, som ger $y = 4$.
Enda stationära punkt är alltså $(\frac{1}{2}, 4)$.

$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{2}{x^3}, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 1, \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{16}{y^3}$. I $(\frac{1}{2}, 4)$ får dessa derivator värdena $A = 16, B = 1, C = \frac{1}{4}$, som ger $AC - B^2 = 3 > 0$. Alltså får vi

Svar: Lokalt minimum i $(\frac{1}{2}, 4)$.

6. Sätt

$$F(x,y,z) = 2x + 5y - z^2 - 6$$
$$G(x,y,z) = x^2 + 4y^2 - z - 4$$

F och G är differentierbara funktioner.
Man har $F(1,1,1) = G(1,1,1) = 0$.
Implicita funktionssatsen medför att ekvationssystemet

$$F(x,y,z) = 0$$
$$G(x,y,z) = 0$$

definierar differentierbara funktioner $y(x)$ och $z(x)$ i en omgivning av $(1,1,1)$ om determinanten för Jacobimatrisen $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}$ är skild från 0 i punkten $(1,1,1)$.

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} = \begin{pmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2z \\ 8y & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\det\left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(1,1,1)\right) = \det\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} = -5 + 16 = 11 \neq 0.$$

Alltså definierar ekvationssystemet de önskade funktionerna.

7. Linjerna
$L_1 : \quad \bar{r} = \bar{a}_1 + t\bar{v}_1 = (1,0,2) + t(0,1,1)$
$L_2 : \quad \bar{r} = \bar{a}_2 + t\bar{v}_2 = (0,0,-2) + t(2,-1,1)$
är givna. För att få minsta avståndet mellan dem bildar man skillnadsvektorn $\bar{s} = \bar{a}_1 - \bar{a}_2 = (1,0,2) - (0,0,-2) = (1,0,4)$ som förbinder två punkter på vardera linjen.
Bilda vektorn $\bar{w}$ som är vinkelrät mot båda linjerna:

$$\bar{w} = k\bar{v}_1 \times \bar{v}_2 = k \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = k(1+1, 2-0, 0-2) = k(2,2,-2).$$

Välj $\bar{w}$ normerad, dvs $\bar{w} = (1,1,-1)/\sqrt{3}$.
Det sökta avståndet d fås nu som längden av $\bar{s}$:s projektion på $\bar{w}$.
$d = |(\bar{s} \cdot \bar{w})\bar{w}| = |\bar{s} \cdot \bar{w}| = |(1,0,4) \cdot (1,1,-1)/\sqrt{3}| = |1 + 0 - 4|/\sqrt{3} = \underline{\sqrt{3}}$.

8. Funktionen $G(x,y) = x^3 + 3y^3$ är kontinuerlig på den slutna, begränsade, reguljära kurvan (ellipsen) $g(x,y) = x^2 + 2y^2 - 1 = 0$.
Funktionen har alltså ett största och ett minsta värde på kurvan. Vi söker dessa värden genom att bestämma stationära punkter på kurvan med Lagranges metod. Villkoret för stationära punkter på kurvan är:

$$\text{grad } G = \lambda \text{grad } g$$
$$g = 0$$

grad $G = (3x^2, 9y^2)$, grad $g = (2x, 4y)$ ger:
$3x^2 = 2\lambda x$, $9y^2 = 4\lambda y$, varav
$4\lambda xy = 6x^2y = 9xy^2$, dvs
$6x^2y - 9xy^2 = 3xy(2x - 3y) = 0$.
Fallen $x = 0$, $y = 0$ och $x = 3y/2$ sätts in i bivillkoret $x^2 + 2y^2 = 1$:

$$\begin{aligned} x = 0 &\quad \text{ger} \quad 2y^2 = 1, \quad y = \pm\sqrt{2}/2, \qquad G(0, \pm\sqrt{2}/2) = \pm 3\sqrt{2}/4, \\ y = 0 &\quad \text{ger} \quad x^2 = 1, \quad x = \pm 1, \qquad G(\pm 1, 0) = \pm 1. \\ x = 3y/2 &\quad \text{ger} \quad 9y^2/4 + 2y^2 = 17y^2/4 = 1, \quad y = \pm 2/\sqrt{17}, \end{aligned}$$

$$G(3/\sqrt{17}, 2/\sqrt{17}) = \frac{51}{17\sqrt{17}} = \frac{3}{\sqrt{17}}, \qquad G(-3/\sqrt{17}, -2/\sqrt{17} = -\frac{3}{\sqrt{17}}.$$

Man ser att $G_{max} = G(0, \sqrt{2}/2) = 3\sqrt{2}/4$, $G_{min} = G(0, -\sqrt{2}/2) = -3\sqrt{2}/4$.

Svar: $\underline{-3\sqrt{2}/4 \le G(x, y) \le 3\sqrt{2}/4}$.
Anm: $p = 3\sqrt{2}/4 > 1$ eftersom $p^2 = 9 \cdot 2/16 = 9/8 > 1$.

9. Vektorn $(-2, 5, 5, 0)$ är en linjärkombination av vektorerna $(3, 0, 9, 4)$, $(2, -1, 1, 4)$ och $(1, -1, 5, -2)$ om:

$$x \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{för några } x, y, z \text{ där inte alla är } 0.$$

Vi löser alltså följande system med Gauss-elimination:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 9 & 1 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 9 & 1 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 9 & 1 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & -17 & 32 & -13 \\ 0 & -4 & 10 & -8 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & -17 & 32 & -13 \\ 0 & -4 & 10 & -8 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 49 & -98 \\ 0 & 0 & 14 & -28 \end{array}\right] \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

varav man ser att $z = -2$, $y = -3$, $x = 2$.

Svar: <u>Vektorn $(-2, 5, 5, 0)$ är en linjärkombination av de tre vektorerna.</u>

10a. $B(E - AB) = B - BAB = (E - BA)B$, VSV.

10b. Vi skall visa att $(E - BA)(E + B(E - AB)^{-1}A) = E$ under förutsättning att $(E - AB)^{-1}$ existerar. Man får:
$(E - BA)(E + B(E - AB)^{-1}A) =$
$E - BA + B(E - AB)^{-1}A - BAB(E - AB)^{-1}A =$
$E - BA + (B(E - AB)^{-1} - BAB(E - AB)^{-1})A =$
$E - BA + (B - BAB)(E - AB)^{-1}A =$
$E - BA + B(E - AB)(E - AB)^{-1}A =$
$E - BA + BA = E$ VSV.