Några extra övningar på Stokes' sats

1. Beräkna med hjälp av Stokes' sats cirkulationen av vektorfältet

$$\boldsymbol{F} = (yz + y - z, xz + 5x, xy + 2y)$$

   längs skärningslinjen L mellan ytorna $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ och $x + y = 1$. L är orienterad så att dess positiva riktning i punkten $(1, 0, 0)$ ges av vektorn $(0, 0, 1)$.

2. Beräkna linjeintegralen av vektorfältet $\boldsymbol{F} = (yz + 2z, xy - x + z, xy + 5y)$ längs skärningslinjen L mellan cylindern $x^2 + z^2 = 4$ och planet $x + y = 2$. L är orienterad så att dess tangentvektor i punkten $(2, 0, 0)$ är $(0, 0, 1)$.

3. Beräkna linjeintegralen av vektorfältet $\boldsymbol{F} = (y + 2x, x^2 + z, y)$ längs den slutna kurvan $\boldsymbol{r} = (\cos u, -\sin u, f(u)), \quad 0 \leq u < 2\pi$, som går ett varv medurs runt cylindern $x^2 + y^2 = 1$ men för övrigt är godtycklig. $f(0) = f(2\pi)$.

   a) direkt med hjälp av parametriseringen.

   b) med hjälp av Stokes' sats.

4. Vektorfältet $\boldsymbol{F}$ ges av $(x^2 - y, y^2 - z, z^2 - x)$ och kurvan Γ är randkurvan till den del av ellipsoiden

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

   för vilken $x \geq 0$, $y \geq 0$ och $z \geq 0$. Bestäm integralen

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

   om omloppsriktningen är sådan att i xy-planet pekar $(\boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{r})$ i samma riktning som $\boldsymbol{e}_z$.

Svar

1. $-\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$
2. -24π
3. π
4. $\dfrac{\pi}{4}(ab + bc + ac]$