

Formelblad i 5B1117 Matematik 3

Följande formler gäller i ett ortogonalt, kroklinjigt koordinatsystem med koordinaterna u_1, u_2, u_3 , basvektorerna $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ och skalfaktorerna h_1, h_2, h_3 :

- $d\mathbf{r} = h_1 du_1 \mathbf{e}_1 + h_2 du_2 \mathbf{e}_2 + h_3 du_3 \mathbf{e}_3$
- $\text{grad } \phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial u_3} \mathbf{e}_3$
- $\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 A_3) \right]$
- $\text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$
- $\text{div grad } \phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial u_3} \right) \right]$

där A_1, A_2 och A_3 är de kroklinjiga komponenterna av vektorfältet \mathbf{A} ,

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3.$$

Specialfall

Cylinderkoordinater: $h_\rho = 1, \quad h_\varphi = \rho, \quad h_z = 1.$

Sfäriska koordinater: $h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r \sin \theta.$