Institutionen för matematik
KTH

Lösningsförslag till tentamensskrivning, 2005-01-15

5B1117 Matematik III för E och ME

1. Integrerar vi först med avseende på x, sedan y och sist z får vi

$$\iiint_K (2x^2+2y+2z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}z \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{1-y} \mathrm{d}x\,(2x^2+2y+2z)$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}z \int_0^1 \mathrm{d}y\,[\frac{2x^3}{3}+2xy+2xz]_0^{1-y} = \int_0^1 \mathrm{d}z \int_0^1 (\frac{2(1-y)^3}{3}+2(1-y)(y+z))\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}z \int_0^1 (\frac{2}{3}-\frac{2}{3}y^3+2z-2yz)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 (\frac{1}{2}+z)\mathrm{d}z = 1.$$

2. Integranden är överallt ≥ 0, så den generaliserade integralen är antingen konvergent eller divergerar mot $+\infty$ oberoende av hur $\mathbf{R^3}$ tömms ut. Vi byter till sfäriska koordinater (r,θ,φ), väljer ett tal $R>0$ och integrerar först över det begränsade området $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$, dvs $r \leq R$. Eftersom $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$ så får vi

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq R^2} \frac{1}{(1+(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}})^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^R \mathrm{d}r \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \frac{r^2\sin\theta}{(1+r^3)^2}$$

$$= 4\pi \int_0^R \frac{r^2\,\mathrm{d}r}{(1+r^3)^2} = \{\text{subst.}: t=r^3, \quad \mathrm{d}t = 3r^2\mathrm{d}r\}$$

$$= \frac{4\pi}{3}\int_0^{R^{1/3}} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2} = \frac{4\pi}{3}[-\frac{1}{1+t}]_0^{R^{1/3}} = \frac{4\pi}{3}(1-\frac{1}{1+R^{1/3}}).$$

Då $R \to +\infty$ så växer detta mot $\frac{4\pi}{3}$, som därmed är integralens värde (och integralen är konvergent).

3. Integranden passar inte så bra ihop med integrationsvägen (eftersom vi har kombinationerna x^2+y resp. x^2+y^2), så vi undersöker möjligheten att byta integrationsväg. Vi skriver integranden som $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$, där $P = \frac{2x}{x^2+y}+1$, $Q = \frac{1}{x^2+y}+1$. Den är singulär på parabeln $y=-x^2$, som ligger i undre halvplanet plus origo, men är för övrigt kontinuerligt deriverbar. Vi finner att

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-2x}{(x^2+y)^2} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

dvs att differentialen $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ är lokalt exakt Alltså är det tillåtet att deformera integrationsvägen så länge vi håller oss ovanför parabeln $y=-x^2$, alternativt kan vi hitta en potential till fältet i detta område.

En lämplig ny integrationsväg är kurvan

$$L_{\text{ny}}: \quad y = 1-x^2$$

från $(x, y) = (-1, 0)$ till $(1, 0)$. Detta är den singulära parabeln upphissad en enhet och vi har $x^2 + y = 1$ längs L_{ny}. Därmed fås, om vi väljer x som parameter längs L_{ny},

$$\int_L (\frac{2x}{x^2+y} + 1)\,\mathrm{d}x + (\frac{1}{x^2+y} + 1)\,\mathrm{d}y = \int_{L_{\text{ny}}} (\frac{2x}{x^2+y} + 1)\,\mathrm{d}x + (\frac{1}{x^2+y} + 1)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-1}^{1} (2x+1)\mathrm{d}x + (1+1)(-2x)\mathrm{d}x = 2.$$

Den som söker en potential och räknar rätt kommer att finna

$$U = \ln(x^2 + y) + x + y + C,$$

vilket ger samma svar som ovan: $U(1, 0) - U(-1, 0) = 2$.

4. Det är praktiskt att göra substitutionen $t = x^2$. Då har vi potensserien

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3(n+1)^2 2^n t^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$$

i t. Konvergensradien R för denna är

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

under förutsättning att gränsvärdet existerar. Vi har

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{3(n+1)^2 2^n}{3(n+2)^2 2^{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{2(n+2)^2} = \frac{(1+\frac{1}{n})^2}{2(1+\frac{2}{n})^2},$$

som konvergerar mot $1/2$. Alltså är $R = 1/2$. För $t = \pm 1/2$ får vi serien $\sum_{n=1}^{\infty} 3(n+1)^2(\pm 1)^n$, som uppenbarligen divergerar (termerna går inte ens mot noll). Alltså är konvergensmängden $-1/2 < t < 1/2$. Detta svarar mot x i intervallet

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

5. a) Vinkeln $v = \arccos a$ motsvarar vinkeln θ i sfäriska koordinater. Denna vinkel är öppningsvinkeln i cirkelsektorn mellan (0,0,1) och en punkt på randen ∂K. Sfärytans radie $r = 1$. Avståndet R längs S kan beräknas som en båglängd

$$R = \theta\, r = v$$

b)

$$P = 2\pi\rho = 2\pi r \sin\theta = 2\pi \sin v$$

där ρ är avståndet från randkurvan till z-axeln.

c) $A = \text{arean av } K = \int_{\theta=0}^{v} \text{omkrets} \cdot \text{bredd} = \int_{\theta=0}^{v} 2\pi \sin\theta \cdot \mathrm{d}\theta = 2\pi \int_{\theta=0}^{v} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta =$

$$= 2\pi(1 - \cos v)$$

d)

$$\frac{P}{2R} = \frac{2\pi \sin v}{2v}$$

$$\frac{A}{R^2} = \frac{2\pi(1-\cos v)}{v^2}$$

Dessa uttryck beror av v, och därmed även av a. Uttrycken är olika.

Genom t.ex. Maclaurin-utveckling kan man se att uttrycken blir lika och oberoende av v endast i gränsen $v \to 0$, dvs då kalotten går mot en plan cirkel (vars radie går mot noll).

6. a) B har en vektorpotential eftersom $\operatorname{div} B = -1+0+1 = 0$.

Om vektorpotentialen skall ha formen $\boldsymbol{A} = (0, A_y, 0)$ så måste följande gälla:

$$\boldsymbol{B} = (-x, 0, 2x+z) = \operatorname{rot} A = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{e}}_x & \hat{\boldsymbol{e}}_y & \hat{\boldsymbol{e}}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & A_y & 0 \end{vmatrix} = (-\frac{\partial A_y}{\partial z}, 0, \frac{\partial A_y}{\partial x})$$

Detta motsvarar ekvationssystemet

$$\begin{cases} -x = -\frac{\partial A_y}{\partial z} \\ 2x+z = \frac{\partial A_y}{\partial x} \end{cases}$$

Integration av första ekvationen med avseende på z ger $A_y = xz + f(x,y)$, där f är en godtycklig funktion av x och y. Derivering av detta m.a.p. x ger $\frac{\partial A_y}{\partial x} = z + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, vilket kan sättas in i den andra ekvationen. Då får vi $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x$, vilket genom integration ger $f(x,y) = x^2 + g(y)$. Vi har inga ytterligare krav, varför vi kan välja funktionen g så enkel som möjligt, t.ex. $g(y) = 0$. Då har vi alltså visat att

$$\boldsymbol{A} = (0, A_y, 0) = (0, xz + x^2, 0)$$

är en vektorpotential till det givna vektorfältet $\boldsymbol{B}$.

b) Om $\boldsymbol{B}$ har en vektorpotential så att $\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$, så får vi:

$$\iint_S \boldsymbol{B} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma = \iint_S \operatorname{rot} \boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma = \{\text{Stokes}' \text{ sats}\} = \oint_{\partial S} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

Ytintegralen kan bero endast av randen eftersom det blir en kurvintegral.

Den givna ytan har randkurvan

$$\partial S : x^2 + y^2 = 1, \quad z = 1$$

Omloppsriktningen är positiv eftersom $n_z > 0$. Integralen blir:

$$\iint_S \boldsymbol{B} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\sigma = \oint_{\partial S} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \{z = 1\} = \oint_{x^2+y^2=1} (0, x + x^2, 0) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} =$$

$$= \{\text{parametrisera med } \varphi, \quad \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}(\cos\varphi, \sin\varphi, 0) = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)\,\mathrm{d}\varphi\} =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos\varphi + \cos^2\varphi)\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} (\cos^2\varphi + \cos^3\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \pi + 0 = \pi$$

7. De nya basvektorerna $\hat{\boldsymbol{e}}_i = \dfrac{1}{h_i}\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x_i}$ är parallella med respektive derivata

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = (2u, 2v, b), \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = (2av, 2u, c), \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w} = (0, 0, 1)$$

Ortogonalitet kräver att skalärprodukterna mellan dessa är noll, vilket ger

$$b = c = 0$$

och

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = 4auv + 4uv = 0,$$

vilket innebär $a = -1$.

Med dessa värden på konstanterna får vi

$$\hat{\boldsymbol{e}}_u = \frac{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}}{|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}|} = \frac{(2u, 2v, 0)}{\sqrt{4u^2 + 4v^2}} = \frac{(u, v, 0)}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_v = \frac{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}}{|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}|} = \frac{(-2v, 2u, 0)}{\sqrt{4v^2 + 4u^2}} = \frac{(-v, u, 0)}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

$$\hat{\boldsymbol{e}}_w = \frac{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}}{|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w}|} = (0, 0, 1)$$

Vektorfältet $\boldsymbol{A}$ med de nya variablerna men med kartesiska basvektorer är

$$\boldsymbol{A} = (x, y, 3z) = (u^2 - v^2, 2uv, 3w)$$

De respektive komponenterna av $\boldsymbol{A}$ i den nya basen bildas med skalärprodukter

$$A_u = \boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_u = (u^2 - v^2, 2uv, 3w) \cdot \frac{(u, v, 0)}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{u^3 - uv^2 + 2uv^2}{\sqrt{u^2 + v^2}} = u\sqrt{u^2 + v^2}$$

$$A_v = \boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_v = (u^2 - v^2, 2uv, 3w) \cdot \frac{(-v, u, 0)}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{v^3 - u^2v + 2u^2v}{\sqrt{u^2 + v^2}} = v\sqrt{u^2 + v^2}$$

$$A_w = \boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_w = (u^2 - v^2, 2uv, 3w) \cdot (0, 0, 1) = 3w$$

8. Vi vill använda konstanta basvektorer eftersom integralen är vektorvärd. Ytan är lämplig att parametrisera med de sfäriska koordinaterna θ och φ.

Basvektorn $\hat{\boldsymbol{e}}_\theta$ kan uttryckas i de kartesiska basvektorerna

$$\hat{\boldsymbol{e}}_\theta = \frac{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}}{|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}|} = \frac{1}{h_\theta}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta)$$

Ytelementet på en sfäryta är $\mathrm{d}\sigma = r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi \cdot r\,\mathrm{d}\theta = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$.

Den sökta ytan S fås för följande värden:

$$r = 1, \quad \theta : 0 \to \pi/2, \quad \varphi : 0 \to \pi/2$$

Nu kan vi integrera

$$\iint_S \hat{\boldsymbol{e}}_\theta\,\mathrm{d}\sigma = \int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\varphi=0}^{\pi/2}(\cos\theta\cos\varphi\,\hat{\boldsymbol{e}}_x + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{\boldsymbol{e}}_y - \sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_z)\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta =$$

$$= \hat{\boldsymbol{e}}_x\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi + \hat{\boldsymbol{e}}_y\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi +$$

$$-\hat{\boldsymbol{e}}_z\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \hat{\boldsymbol{e}}_x \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \hat{\boldsymbol{e}}_y \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - \hat{\boldsymbol{e}}_z \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-\pi^2}{8})$$