Institutionen för matematik
KTH

Modelltentamen, 2004-05-18, skrivtid 5h

5B1117 Matematik III för E och ME

Hjälpmedel: Bifogat formelblad. Miniräknare ej tillåten.
För betyg 3 (godkänt), 4 och 5 krävs preliminärt 11, 17 respektive 23 poäng inklusive bonuspoäng. Samtliga behandlade uppgifter ska förses med utförlig lösning och motivering. Bristfälliga motiveringar medför poängavdrag. Uppgiftsformuleringarna behöver inte lämnas in.

1. Beräkna $\iint_D x^2 e^{x^2y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

   där D ges av att $\begin{cases} xy < 1 \\ 0 < y < x < 3y. \end{cases}$ (3p)

2. Beräkna $\iint\limits_S \operatorname{grad} f \cdot \hat{\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\sigma$,

   där $f = xyz$ och S är övre halvan av enhetssfären:

   $$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad z \geq 0,$$

   med normalen riktad utåt från origo. (3p)

3. Bestäm det allmänna uttrycket för den skalära potentialen till vektorfältet

   $$\boldsymbol{F} = \left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2+1} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}, \frac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}, \frac{-2xz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}\right)$$

   (3p)

4. Beräkna med hjälp av formell nablaräkning (eller annan metod)

   $$\operatorname{rot}\left(\frac{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}}{r^3}\right)$$

   där $\boldsymbol{a}$ är en godtycklig, konstant vektor, $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ är ortsvektorn och r är beloppet av ortsvektorn. (3p)

5. Bestäm MacLaurinutvecklingen för $\arctan x$ genom att använda att

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,$$

där $\dfrac{1}{1+t^2}$ kan uttryckas som en potensserie (MacLaurinutveckling) före integrationen. Bestäm även konvergensområdet för utvecklingarna av $\dfrac{1}{1+t^2}$ respektive $\arctan x$. (4p)

6. Ett vektorfält

$$\boldsymbol{A} = (2r - 4r^3)\,\hat{\boldsymbol{e}}_r + r\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi$$

är givet i i sfäriska koordinater.

a) Avgör hur den slutna ytan Σ skall väljas för att flödet av vektorfältet $\boldsymbol{A}$ genom Σ skall bli så stort som möjligt. (2p)

b) Beräkna det maximala flödet av $\boldsymbol{A}$ genom Σ. (2p)

7. Ett kroklinjigt koordinatsystem definieras av

$$\begin{cases} u = r\,\sin^2\dfrac{\theta}{2} \\ v = r\,\cos^2\dfrac{\theta}{2} \\ w = 2\varphi \end{cases}$$

där r, θ och φ är de sfäriska koordinaterna.

a) Visa att basvektorerna $\hat{\boldsymbol{e}}_u$, $\hat{\boldsymbol{e}}_v$ och $\hat{\boldsymbol{e}}_w$ är ortogonala. (1p)

b) Bestäm skalfaktorerna h_u, h_v och h_w och uttryck dem i koordinaterna u, v och w. (2p)

c) Beräkna divergensen av $\boldsymbol{F} = \sqrt{u^2+uv}\,\hat{\boldsymbol{e}}_u + \sqrt{v^2+uv}\,\hat{\boldsymbol{e}}_v$. (1p)

8. Visa att ytintegralen

$$\iint_\Sigma \frac{\hat{\boldsymbol{e}}_r\cdot\hat{\boldsymbol{n}}}{r^3}\hat{\boldsymbol{e}}_r\,\mathrm{d}\sigma$$

kan omformas till en volymsintegral av typen

$$\iiint_V \operatorname{grad} f(r)\,\mathrm{d}V$$

över det av Σ omslutna området. Origo är en yttre punkt till V. Bestäm funktionen $f(r)$.

Ledning: Använd att $\hat{\boldsymbol{e}}_r = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$. (4p)