

GRUPPARBETE 2

6 korrekta svar ger G.

Alla svar måste vara prydligt
nedskrivna och försedda med
utförliga förklaringar.

Här arbetar vi med mängden av följande par:

$$\{ \langle x, \alpha \rangle \mid x \text{ är en restklass modulo 3 och } \alpha \text{ är en restklass modulo 4} \}.$$

Kalla denna mängd för $\mathbf{Z}_3 \rtimes \mathbf{Z}_4$; *den semidirekta produkten av $\mathbf{Z}_3$ och $\mathbf{Z}_4$.*

1. Hur många element har $\mathbf{Z}_3 \rtimes \mathbf{Z}_4$?

För alla element $z \in \mathbf{Z}_3$ och $\alpha \in \mathbf{Z}_4$ låt $f_\alpha(z) = z$ om α är 0 eller 2 och $f_\alpha(z) = 2z$ annars. Inför

nu en operation $*$ på $\mathbf{Z}_3 \rtimes \mathbf{Z}_4$ på följande vis:

$$\langle x, \alpha \rangle * \langle z, \beta \rangle = \langle x + f_\alpha(z), \alpha + \beta \rangle.$$

Observera noga att $x + f_\alpha(z)$ beräknas modulo 3 och $\alpha + \beta$ beräknas modulo 4.

Ett annat bekvämt sätt att skriva element i $\mathbf{Z}_3 \rtimes \mathbf{Z}_4$: $\langle x, \alpha \rangle = X_\alpha$.

Operationen kan då skrivas $X_\alpha * Z_\beta = (X + f_\alpha(Z))_{\alpha+\beta}$.

2. Kontrollera att $*$ är associativ. En viktig moment här är att separat visa att

$$f_\alpha(y + f_\beta(z)) = f_\alpha(y) + f_{\alpha+\beta}(z).$$

3. Visa att $\langle 0, 0 \rangle$ är det neutrala elementet under $*$.

4. Ange ett sätt att beräkna inversen till $\langle x, \alpha \rangle$.

Vi har gjort 1, 2, 3 och 4 – och därmed bevisat att $\mathbf{Z}_3 \rtimes \mathbf{Z}_4$ är en grupp.

5. Gruppen är inte abelsk. Ge exempel på element π och $\sigma \in \mathbf{Z}_3 \rtimes \mathbf{Z}_4$ som uppfyller $\pi\sigma \neq \sigma\pi$.

6. Bestäm ordningen hos varje element i $\mathbf{Z}_3 \rtimes \mathbf{Z}_4$.