

# LÖSNINGAR

GVL

$$\textcircled{1} \quad 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2, n \geq 1$$

Bevis

IND. BAS:  $n=1$ ; då är  $VL_1 = 1^3$ ,  $HL_1 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2}\right)^2$   
och de är lika.  
OK!

IND. STEG  $VL_p = HL_p$  för något  $p$

undersöker  $VL_{p+1}$ :

$$\boxed{1^3 + 2^3 + \dots + p^3} + (p+1)^3 = \left( \frac{(p+1)p}{2} \right)^2 + (p+1)^3$$

$$HL_p = \left[ \frac{(p+1)p}{2} \right]^2$$

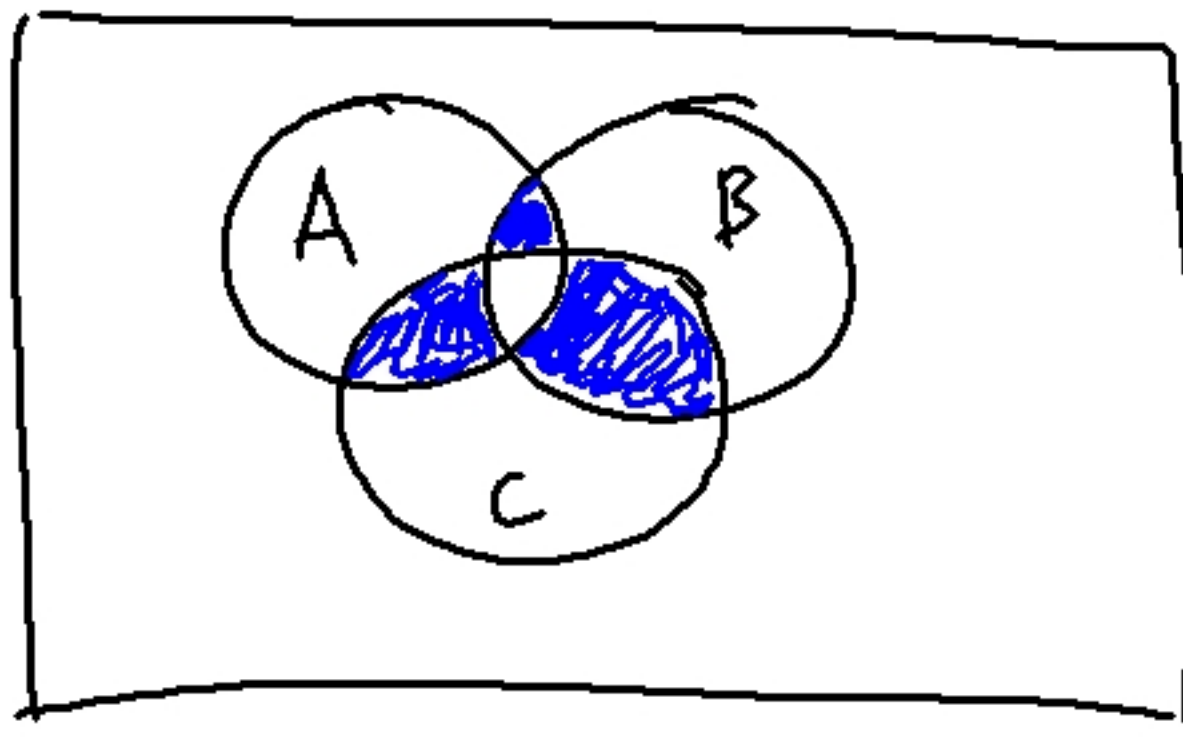
enligt ind.  
antagande

$$= \frac{p^2}{4} \boxed{(p+1)^2} + (p+1) \boxed{(p+1)^2} = (p+1)^2 \overbrace{\left( \frac{p^2}{4} + p+1 \right)}^{\left( \frac{p}{2} + 1 \right)^2}$$
$$= \frac{(p+1)^2 \cdot (p+2)^2}{4} =$$

bryta ut

enligt ind. beviset så är  $VL_{p+1} = HL_{p+1}$ .

②



$$\begin{aligned} X &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) \setminus \\ &\quad \setminus (A \cap B \cap C) = \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) \cap (A \cap B \cap C)^c \end{aligned}$$

③ Rekursiv följd

$$\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_1 = 6 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n \end{cases}$$

, Visa att  $a_n = 3 \cdot 2^n$   
för  $n = 0, 1, 2, \dots$

BEVIS.

BAS

$$\left. \begin{array}{l} a_0 = 3 = 3 \cdot 2^0 \\ a_1 = 6 = 3 \cdot 2^1 \end{array} \right\} \text{OK}$$

IND. STEG

antag att  $a_p = 3 \cdot 2^p$   
 $a_{p+1} = 3 \cdot 2^{p+1}$

antagandet är alltså att  $a_p = 3 \cdot 2^p$   
 $a_{p+1} = 3 \cdot 2^{p+1}$

undersöker  $a_{p+2}$ :

$$\boxed{a_{p+2}} = a_{p+1} + 2a_p = 3 \cdot 2^{p+1} + 2 \cdot 2^p \cdot 3 =$$

enligt  
den rekursiva def.

$$= 3(2^{p+1} + 2 \cdot 2^p) =$$

$$= 3(2^{p+1} + 2^{p+1}) =$$

$$= \boxed{3 \cdot 2^{p+2}}$$

enligt ind. principen  
är beviset klart.

# GRÖN

$$\textcircled{1} \quad 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

BEVIS

$$n \geq 1$$

BAS  $n=1$  :  $VL_1 = 1 \cdot 2$  ;  $HL_1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}$

OK!

och de är lika

IND. STEG

antar att  $VL_p = HL_p$

undersök  $VL_{p+1}$ :

$$VL_{p+1} =$$

$$= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + p(p+1) + (p+1)(p+1) =$$

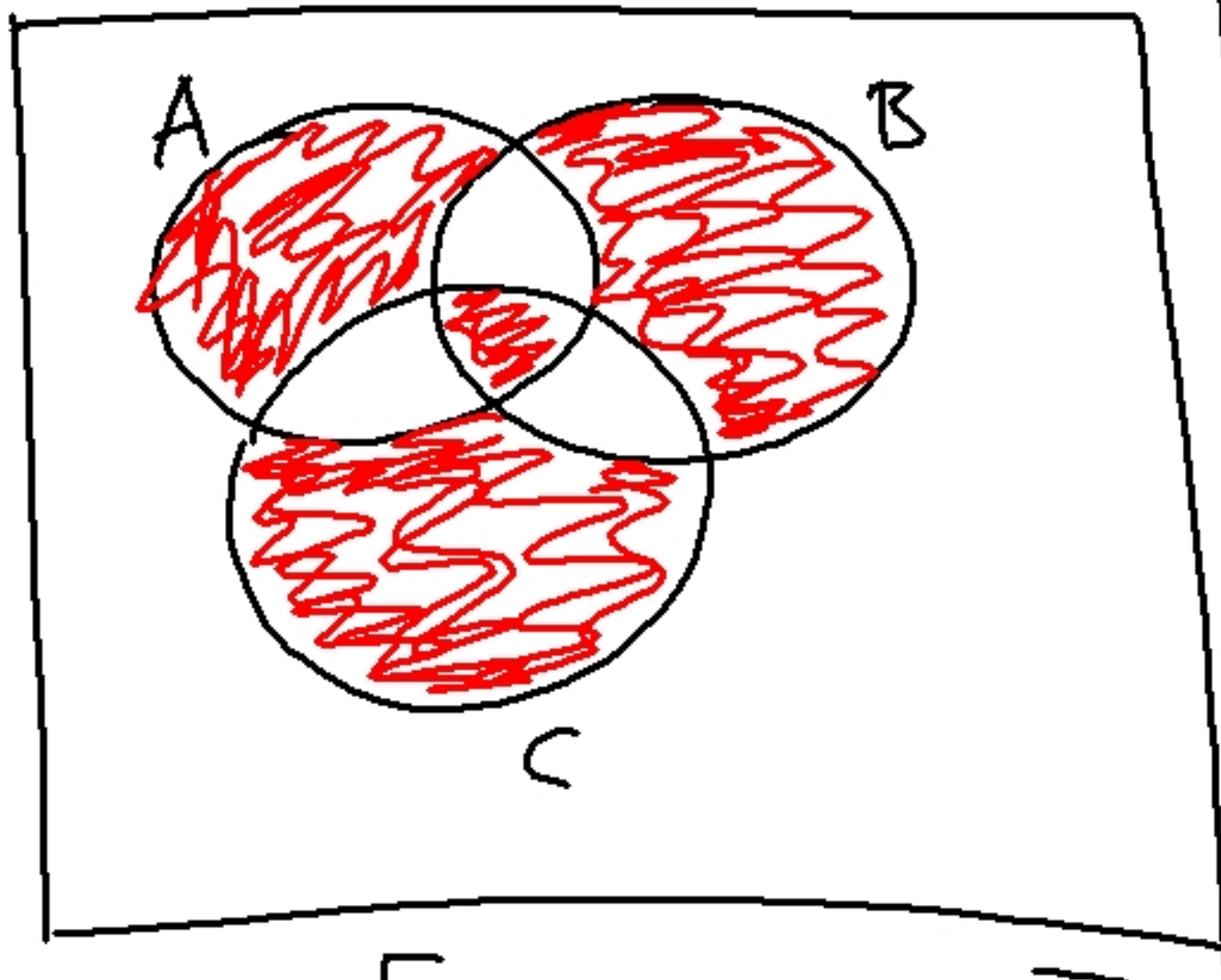
$HL_p$  enligt  
ind. antagandet

$$= \frac{p(p+1)(p+2)}{3} + (p+1)(p+2) =$$

$$= \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{3} = HL_{p+1}$$

enligt ind. principen är beviset  
klart.

②



$$\begin{aligned}
 X = & A \cap (B \cup C)^c \\
 & \cup \\
 & B \cap (A \cup C)^c \\
 & \cup \\
 & C \cap (A \cup B)^c \\
 & \cup \\
 & A \cap B \cap C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X = & [A \setminus (B \cup C)] \cup [B \setminus (A \cup C)] \\
 & \cup [C \setminus (A \cup B)] \cup (A \cap B \cap C)
 \end{aligned}$$

③ Rekursiv talföljd

$$\begin{cases} a_0 = -2 \\ a_1 = 2 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n \end{cases}$$

Visa att  $a_n = (-2) \cdot (-1)^n$

Bevis

$$a_0 = -2$$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 2 + (-4) = -2$$

$$a_3 = -2 + 4 = 2$$

Följden  
är alltså

$$a_0 = -2$$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = -2$$

$$a_3 = 2$$

$$\dots$$
$$a_n = (-2) \cdot (-1)^n$$

$a_4$  är samma  
som  $a_1$   
och  $a_5$  är samma  
som  $a_3$

OSV.