

Kap 2 (II). GRUPPER

$(G, \cdot)$

är en grupp om

— $x, y \in G \Rightarrow x \cdot y \in G$

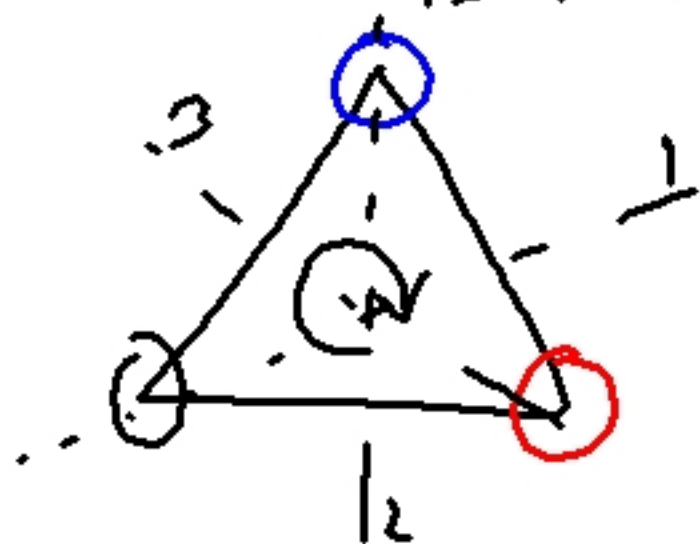
— $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

— finns ett e som uppfyller
$$e \cdot x = x \cdot e = x$$

— Till varje x finns det x^{-1}
$$x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = e$$

Exempel 1

rörelser av triangeln, S_3



$e = id$

S_1 snurr 120°

S_2 snurr 240°

t_1 spegling i axel 1

t_2 — — — axel 2

t_3 — — — axel 3

$S_1 t_2 \neq t_2 S_1$, icke kommutativ

Abelska (kommutativa) grupper
uppfyller

$$ab = ba \text{ för alla } a, b \in G$$

Exempel $(\mathbb{Z}, +)$, abelsk

- $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + b \in \mathbb{Z}$ ok.
- $a + (b + c) = (a + b) + c$ ok.
- $0 + a = a + 0 = a$, 0 "är e"
- $a + (-a) = (-a) + a = 0$, $(-a)$ "är a^{-1} "

1 element $G = \{e\}$ $\begin{array}{c|c} e & e \\ \hline e & e \end{array}$

2 element $G = \{e, a\}$

C_2

	e	a
e	e	a
a	a	e

$$\boxed{a^2 = e}$$

a har ordning
2

$(\mathbb{Z}_2, +)$

	0	1
0	0	1
1	1	0

(ordning är
minsta
potensen
som ger e)

3 element

$$G = \{e, a, b\}$$

C_3

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

$$a^3 = ba = e$$
$$b^3 = ab = e$$

kan inte vara

$$a \cdot a = a$$

$$\boxed{a = e}$$

$a \cdot a =$ antingen b eller e .

a och b har ordning 3

$$a^{-1} = b, b^{-1} = a$$

antag
 $a^2 = e$

$$ab = b$$
$$a = e$$

4 element

$$G = \{e, a, b, ab\}$$

2 möjligheter

1) $b = a^2, ab = a^3, a^4 = e$ a har ordning 4

C_4

	e	a	a^2	a^3
e	e	a	a^2	a^3
a	a	a^2	a^3	e
a^2	a^2	a^3	e	a
a^3	a^3	e	a	a^2

G genererad
av enbart a .

a kallas generator

G kallas då cyklisk

G är isomorf med $(\mathbb{Z}_4, +)$

$$2) \quad a^2 = b^2 = (ab)^2 = e$$

Kleins group

K_4

$\neq$

C_4

•	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

antal element	1	2	3	4
G	$\{e\}$	C_2	C_3	C_4 eller K_4

Delgrupper $\subseteq$

Def: $H \subseteq G$ kallas för en delgrupp
om H är en grupp under samma
"multiplication" som G .

$$H \leq G$$

Exempel

$$1) (\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Q}, +)$$

$$2) (\text{jämna tal}, +) \leq (\mathbb{Z}, +)$$

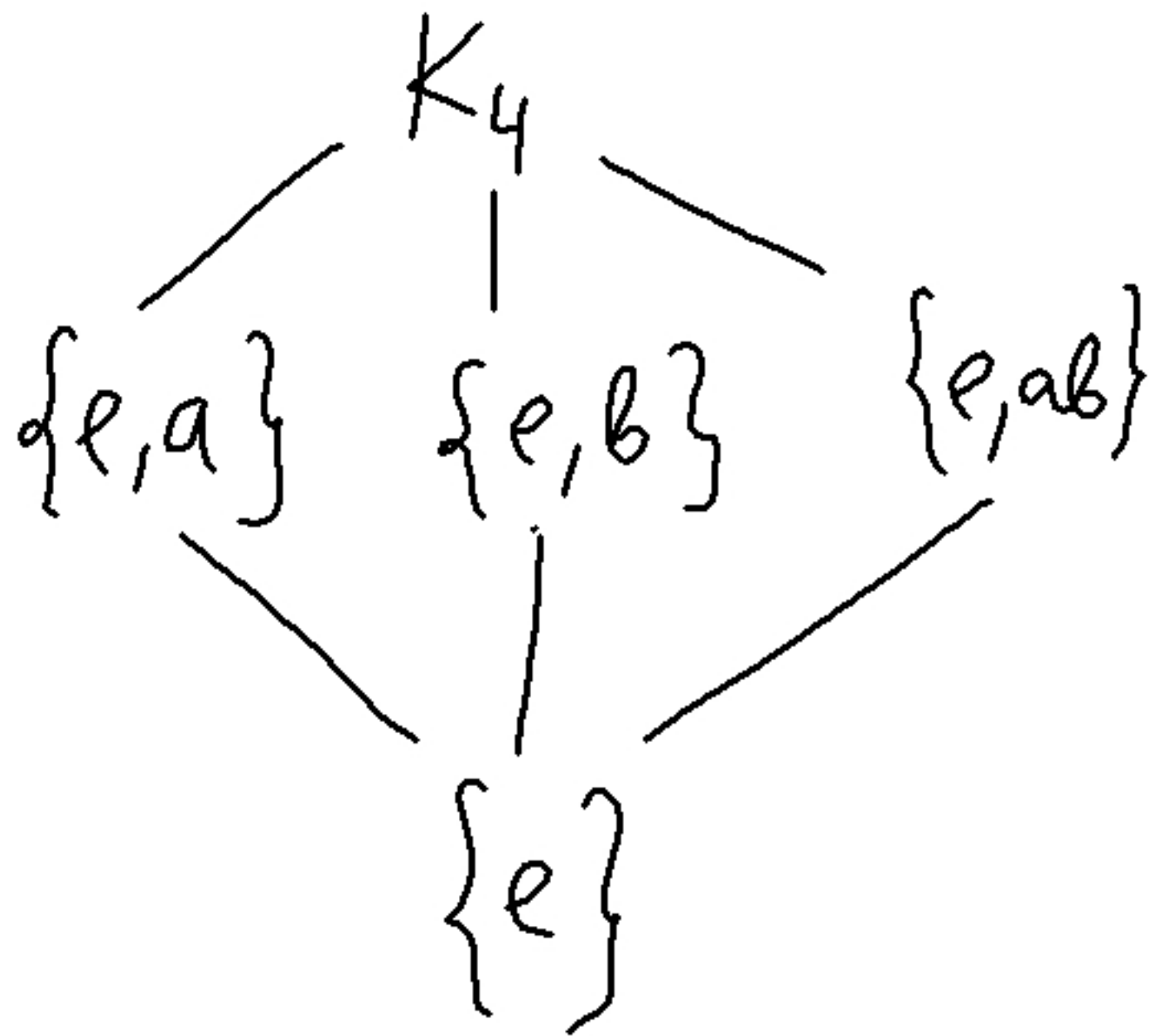
||

$$\{0, \pm 2, \pm 4, \dots\}$$

$$3) \{e, a^2\} \leq C_4$$

	e	a^2
e	e	a'
a^2	a^2	e

Delgruppsgaller



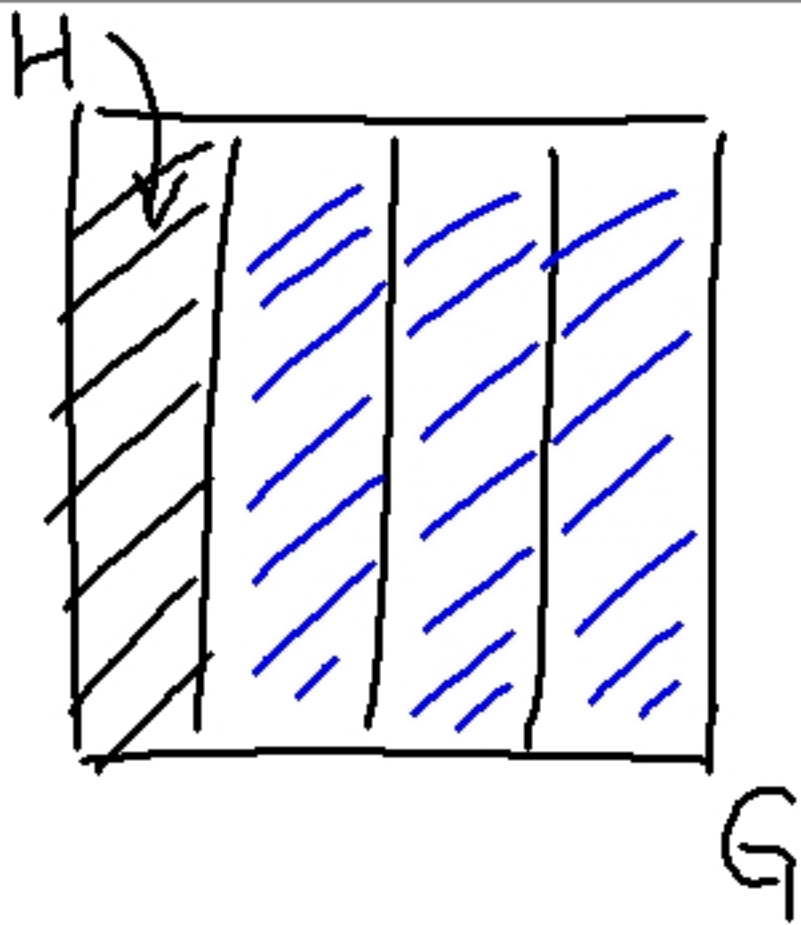
SIDOKLASSER OCH LAGRANGES SATS

(2.1.5, sid 21)

SATS G en grupp, $H \leq G$
och G är ändlig, så gäller att.

$$|H| \text{ delar } |G|$$

Kvoten $\frac{|G|}{|H|}$ betecknas $|G:H|$ och kallas
för index av
 H i G .



Intuitivt

Täck G med
"H-block".

Går det jämnt ut,
Så finns det
 $\frac{|G|}{|H|}$ block i G .

Ett "H-block" konstrueras genom

att multiplicera alla element

i H med ett $g \in G$. Ett
från höger

sådant block kallas högra

sidoklass av H .

$$H \cdot g \subseteq G.$$

alla sidoklasser

har lika

många element

och är antingen disjunkt^{ht}
eller överensstämmer helt.

$$G = C_6 = \{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}, a^6 = e$$

$$H = \{e, a^3\} \quad \begin{array}{c|c} e & a^3 \\ \hline a^3 & e \end{array}, \text{ en undergrupp.}$$

Sidoklasserna är

$$He = \boxed{\{e, a^3\}} = H$$

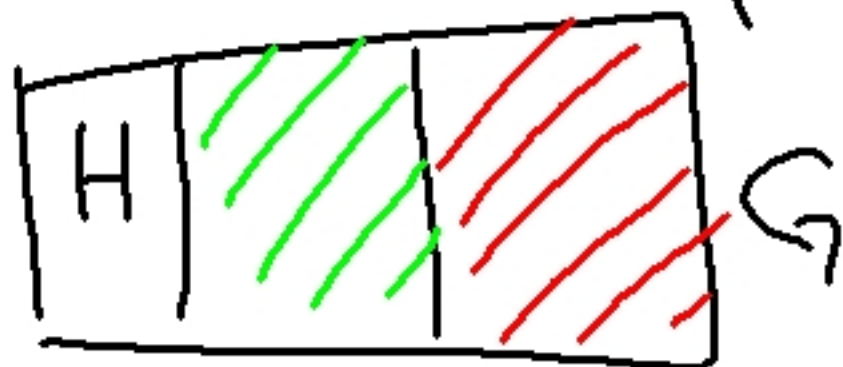
$$Ha = \boxed{\{a, a^4\}}$$

$$Ha^2 = \boxed{\{a^2, a^5\}}$$

$$Ha^3 = H$$

$$Ha^4 = \{a, a^4\}$$

$$Ha^5 = \{a^5, a^2\}$$



$k =$
 $= \text{index}$
 av
 H
 $\vdots$
 G

H	$g_1 H$	$g_2 H$	$\dots$	$g_k H$
-----	---------	---------	---------	---------

$$k \cdot |H| = |G|$$

blockets storlek $= |H|$
 k stycken block

Delgrupper av cykliska grupper

(2.1.4, sid 19)

$$C_n = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$$

Ordningen av $a =$

= minsta potensen av a som blir e
 $\neq 0$

$$= n,$$

om
 $n = df$
så är element
av ordning d
och element av ordning f

$$(a^f)^d = a^{fd} = a^n = e$$

$$(a^d)^f = a^{df} = a^n = e$$

För varje $d \mid n$ finns det ett

element $a^x \in G$ som har ordning

d , och även en undergrupp

$\{e, a^x, a^{2x}, a^{3x}, \dots, a^{(d-1)x}\}$ av ordning d .

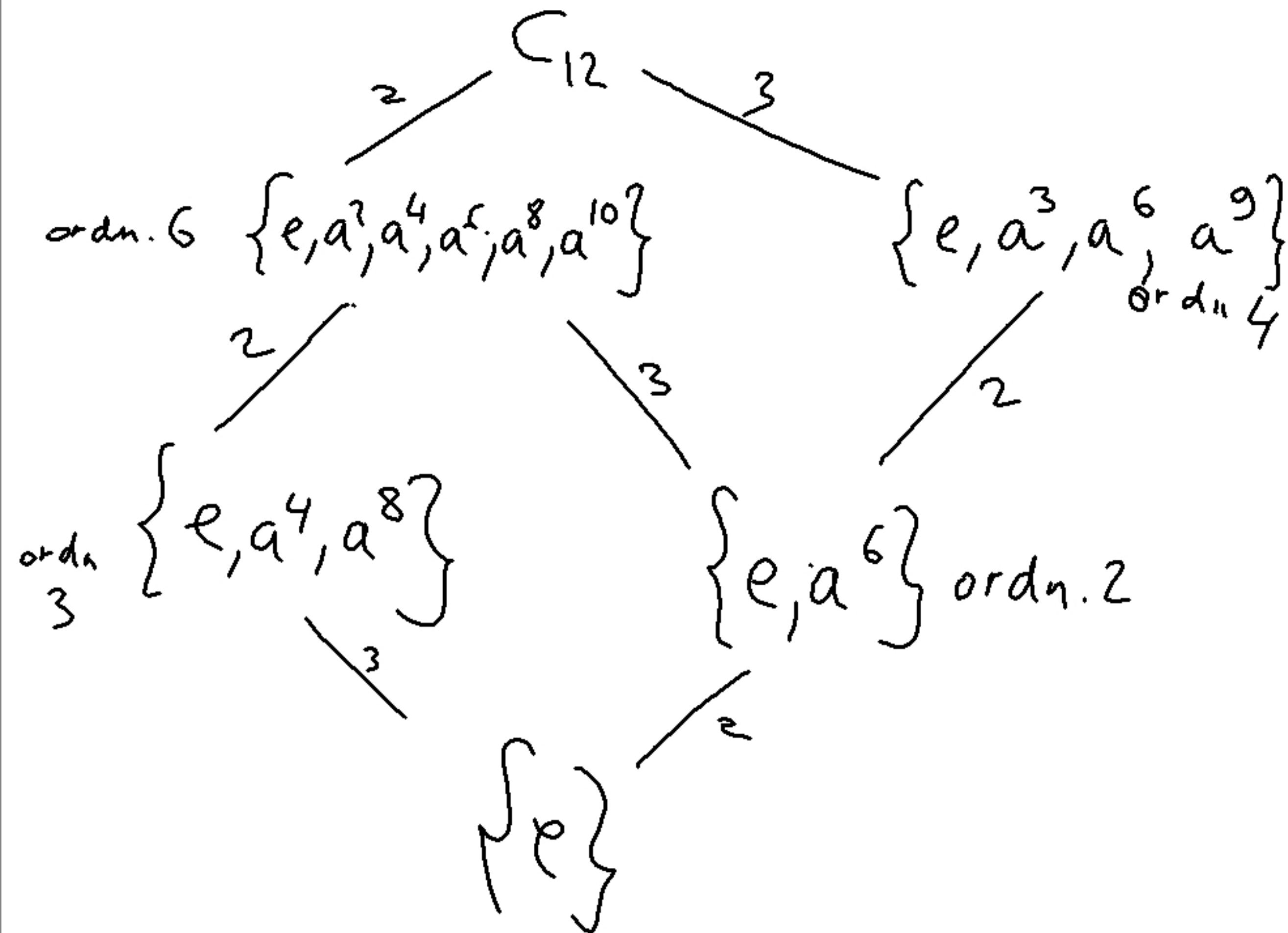
Exempel: $C_{12} = \{e, a, a^2, \dots, a^{11}\}$

möjliga ordningar: 2, 3, 4, 6, 12, 1

a^6	a^4	a^3	a^2	a	e
	a^8		a^{10}	a^5	
		a^9		a^7	
				a^{11}	

undergrupper:

- $\{e, a^6\}$
- $\{e, a^4, a^8\}$
- $\{e, a^3, a^6, a^9\}$
- $\{e, a^2, a^4, a^6, a^8, a^{10}\}$



$$C_{24} = \{e, a, a^2, \dots, a^{23}\}$$

möjliga ordningar

$$(a^9)^8 = e$$

$$(a^{18})^4 = e$$

1	12	8	6	4	3	2	24
e	a^2	a^3	a^4	a^6	a^8	a^{12}	
	a^{10}	a^{15}	a^{20}	a^{18}	a^{16}		↑
	a^{14}	a^{21}					alla
	a^{22}	a^9					a^x där
							$\text{SGD}(x, 24) = 1$
							$a, a^5, a^7,$
							a^{11}, a^{13}
							a^{17}, a^{19}, a^{23}

