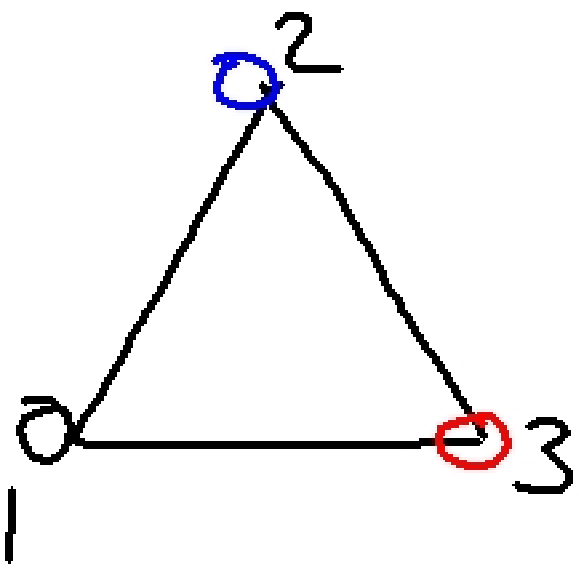
Permutationer



id $\quad 1 \to 1,\ 2 \to 2,\ 3 \to 3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

cykel 1 $\quad 1 \to 2 \to 3 \to 1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

cykel 2 $\quad 1 \to 3 \to 2 \to 1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

spegl 1 $\quad 1 \to 1 \quad 2 \leftrightarrow 3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

spegl 2 $\quad 1 \leftrightarrow 3 \quad 2 \to 2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

spegl 3 $\quad 1 \leftrightarrow 2 \quad 3 \to 3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

och även allmänt

S_n permutationer av n olika objekt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

π en permutation av $\{1\ 2\ 3 \dots n\}$

Permutationer kan multipliceras med varandra.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\pi}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} \sigma & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 1 & 4 & 3 & 2 \\ \pi & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & 4 & 2 & 1 & 3 \end{array} \qquad \pi\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Produkten av permutationer är associativ.

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \qquad id \times \pi = \pi \times id = \pi.$$

<u>inversen</u>

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \qquad \pi\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1234 \\ 1234 \end{pmatrix} = id$$

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

S_n är en grupp!

S_n är inte abelsk:

$$\underset{\pi}{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}} \cdot \underset{\sigma}{\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}$$

$$\pi\cdot\sigma$$

$$\neq$$

$$\sigma\cdot\pi = \text{först } \pi \text{ sen } \sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}$$

CYKELNOTATIONEN

$$\alpha : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 7 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

$1 \to 3 \to 4 \qquad 2 \qquad 5 \to 7 \to 8 \qquad 6$

$(1\,3\,4)(2)(5\,7\,8)(6)$

cykeltyp

$1^2 3^2$

2 cykler av längd 1

2 cykler av längd 3

Övningar, sid 99 och vidare

3.1 $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 7 & 4 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

standard: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 6 & 5 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

enrads: $(3\,2\,6\,5\,1\,7\,4)$

cykelnotationen: $(1\,3\,6\,7\,4\,5)(2)$

5.2

enradsform:

$(5\ 2\ 1\ 7\ 4\ 3\ 6)$

skriv på cykelform:

$6 \to 3 \to 1 \qquad 5 \to 4 \to 7$

2

$(1\ 5\ 4\ 7\ 6\ 3)\ (2)$

Hoppa över 5.1.2 sid. 102–103

<u>cykeltyp av permutationen</u>

$$1^{x_1}\, 2^{x_2}\, 3^{x_3} \cdots\cdots n^{x_n}$$

x_i = antal cykler av längd i i cykelnotationen för permutationen.

Från detta ses lätt vilken ordning en permutation har i S_n.

1) varje cykel av längd k har ordning k.

2) olika cykler i cykelnotationen kommuterar:

$\underline{S_{10}}$:

$$(1\,2\,3)(4\,5\,6\,7)(8)(9\,10) =$$

$$= (9\,10)(4\,5\,6\,7)(8)(1\,2\,3)$$

cykeltypen $1^1 2^1 3^1 4^1$

ordningen i S_n = MGM $(2,3,4) = 12$

minsta gemensamma multipel

5.11 Bestäm cykeltyp och ordning för:

a) $(17)(25)(3)(46)$

$1^1 2^3$

ordingen blir 2

b) $(1764)(253)$

$3^1 4^1$ ordingen blir 12

c) $(1\,7\,6\,4\,2\,5\,3)$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left] & 2 \arrow[r] & 7 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 6 \arrow[dlll] & 4 \arrow[loop above] \\ & 5 \arrow[u] & & & & \end{tikzcd}$$

$(1)(4)(2\,7\,3\,6\,5)$

$5'$, ordningen $= 5$.

SATS (övn. 5.15)

Om $\pi, \sigma \in S_n$ har samma cykeltyp, då finns det en $\tau \in S_n$ s.a.

$$\tau^{-1} \cdot \sigma \cdot \tau = \pi$$

(π, σ kallas då konjugata permutationer.)

Omvänt, har konjugata perm. alltid samma cykeltyp?

Fyll i detaljerna själva

T.ex.

$\tau:$

$$\begin{array}{cccc} (2\,4\,5\,6) & (1\,3\,7) & (8\,9) & \pi \\ \downarrow\downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow\downarrow & \downarrow\downarrow & \\ (1\,8\,7\,9) & (2\,6\,5) & (3\,4) & \sigma \end{array}$$

Cykeltyp är samma, $2^1 3^1 4^1$

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 8 & 7 & 9 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\tau^{-1} \sigma \tau = (2456)(137)(89)$$ vsv.

Jämna och udda permutationer

Varje permutation kan skrivas som en produkt av 2-cykler (transpositioner)

Hur gör man?

Ta först en cykel $(abcd \ldots x) =$

$= (ax) \ldots (ad)(ac)(ab)$

Tecken för en permutation π

$$\operatorname{sign}(\pi) = (-1)^{\text{antalet 2-cykler i en sidan faktoriserig}}$$

<u>Väldefinierad</u> för att antalet 2-cykler π kan brytas i är <u>alltid</u> antingen udda eller jämnt.

(se övn. 5.19)

$$\operatorname{sign}(\pi\sigma) = \operatorname{sign}(\pi)\operatorname{sign}(\sigma).$$

$$\boxed{\operatorname{sign}(\mathrm{id}) = 1}$$

id är en jämn permutation.

Ex. 5.4 (sid 107)

15-spelet

1	3	4	15
6	9	8	10
13	5	7	11
14	12	2	

målet är

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

är tecken för startpermutationen jämnt så går det att ordna brickorna, annars inte.

Övn. 5.21

a)

15	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	1	

beskrivs av startperm.

$(1\ 15)$, udda.

kan ej lösas

b)

2	3	4	1
6	7	8	5
10	11	12	9
14	15		13

$1 \to 4 \to 3 \to 2$

14 15 13

$\underset{}{\overset{-1}{(1432)}}\ \overset{-1}{(5876)}\ \underset{-1}{(9\ 12\ 11\ 10)}$

$\underset{+1}{(13\ 15\ 14)}$, udda.