

STANDARDMÄNGDER, OÄNDLIGA MÄNGDER

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z}_+ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Oändliga $\leftarrow$ vad betyder detta?

Ändlig mängd:

$$M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

det finns alltså ett tal $n > 0$ så att
alla element i M kan numreras
en efter en

f tilldelar
varje
element
från M dess nummer

$$f: M \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

- Varje element från M blir numrerat
- olika element från M får olika nummer

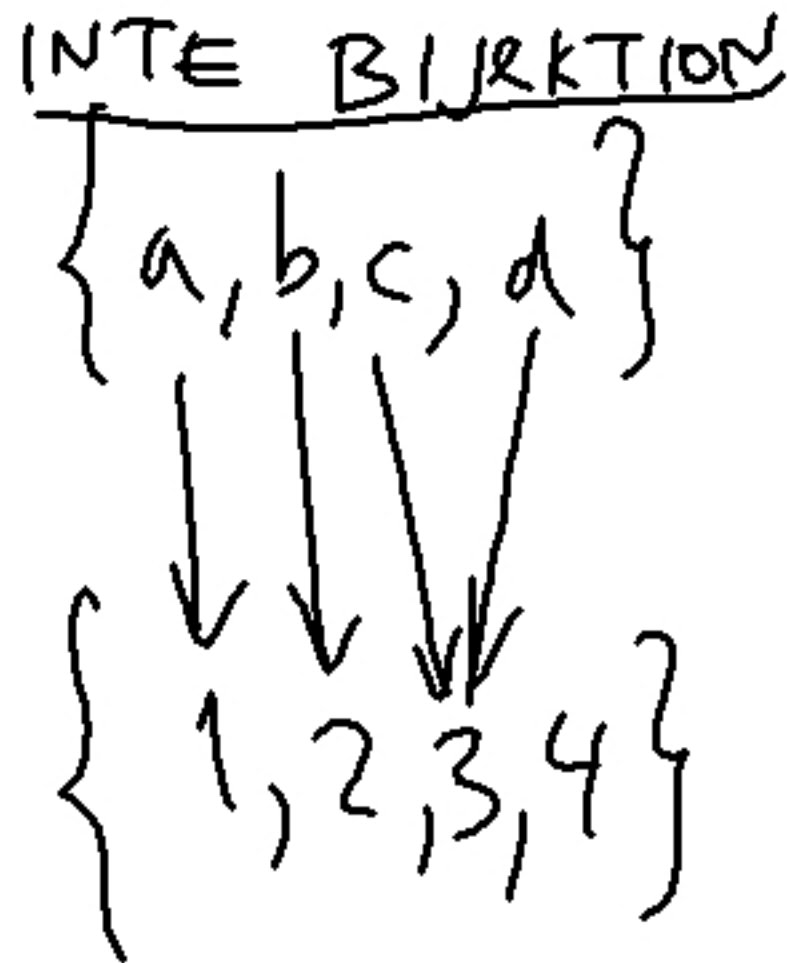
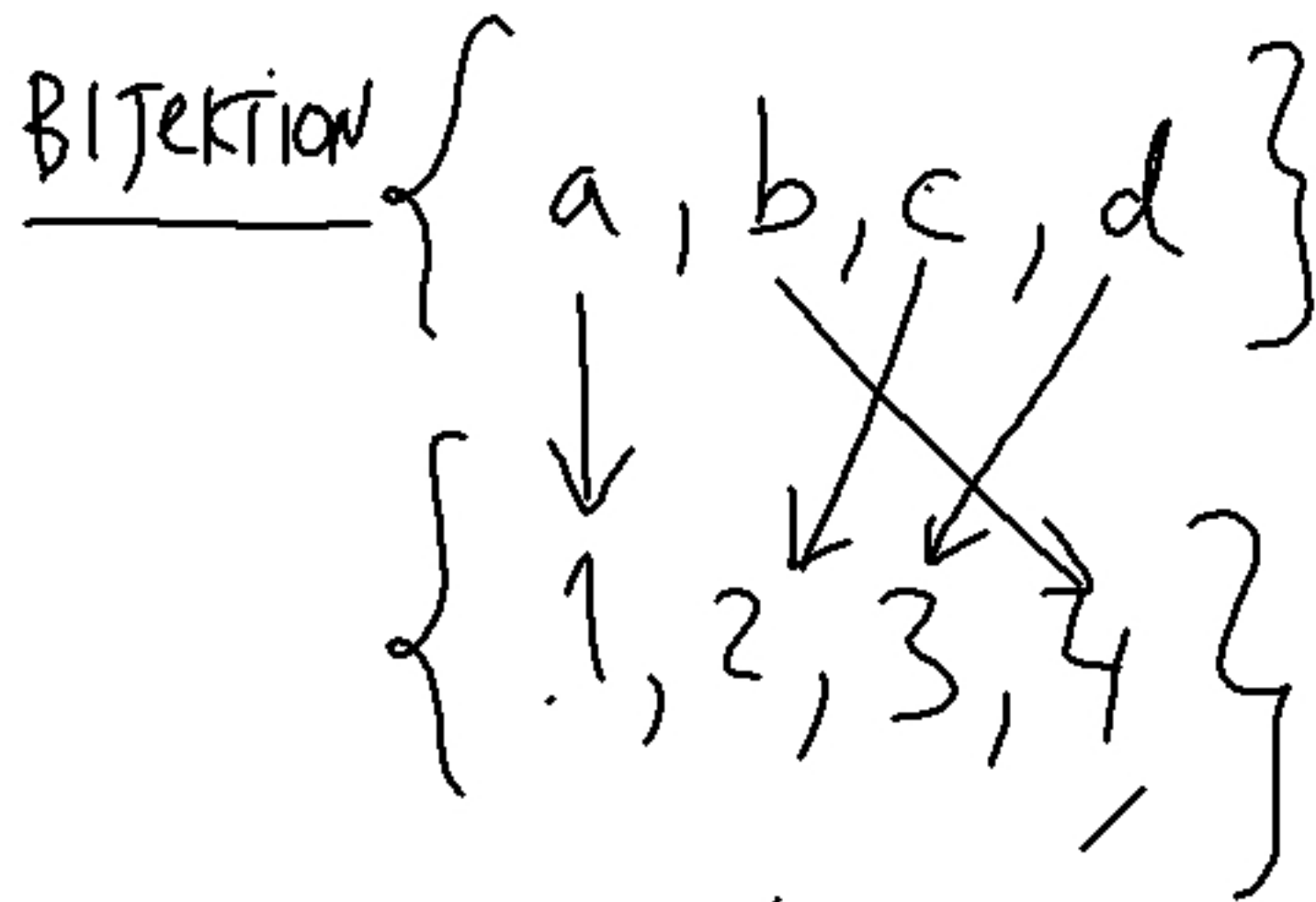
Då heter numreringsfunktionen f
en BIJEKTION:

- För varje $m \in M$ är $f(m)$ definierad.
- varje tal $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ är ett nummer till något $m \in M$ ($f(m) = i$)
- om $a, b \in M$ och $a \neq b$ så är $f(a) \neq f(b)$

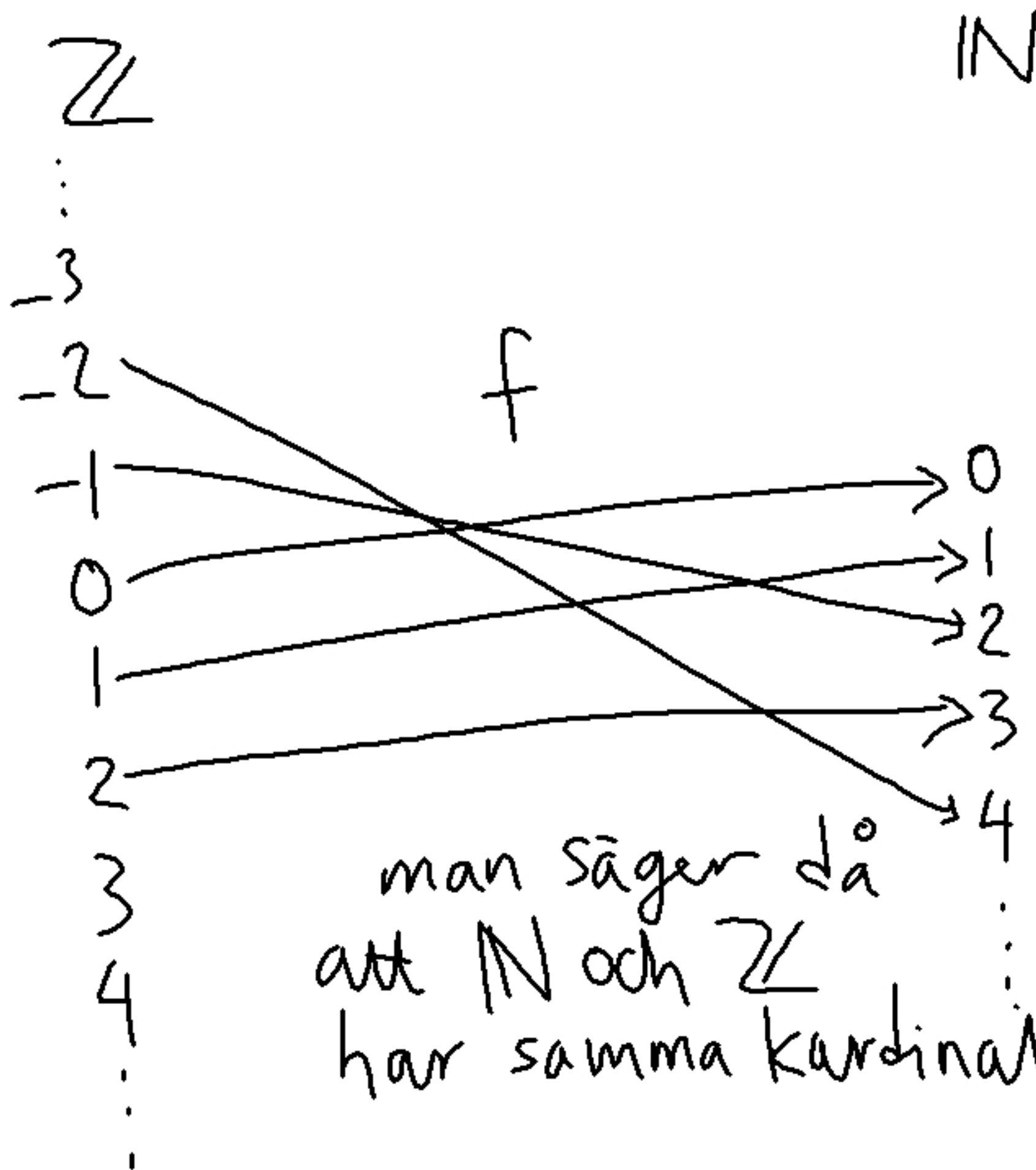
En mängd M kallas oändlig
om det inte finns en bijektion

$$M \rightarrow \{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$$

för alla n



Ändliga mängder har samma antal element om det finns en bijektion mellan dem.



f
 är
 en
 bijektion
 mellan
 $\mathbb{Z}$ och $\mathbb{N}$

man säger då
 att $\mathbb{N}$ och $\mathbb{Z}$
 har samma kardinalitet

Övning: Har $\mathbb{R}$ och $\mathbb{N}$
samma kardinalitet?

Lösning Svaret är nej.

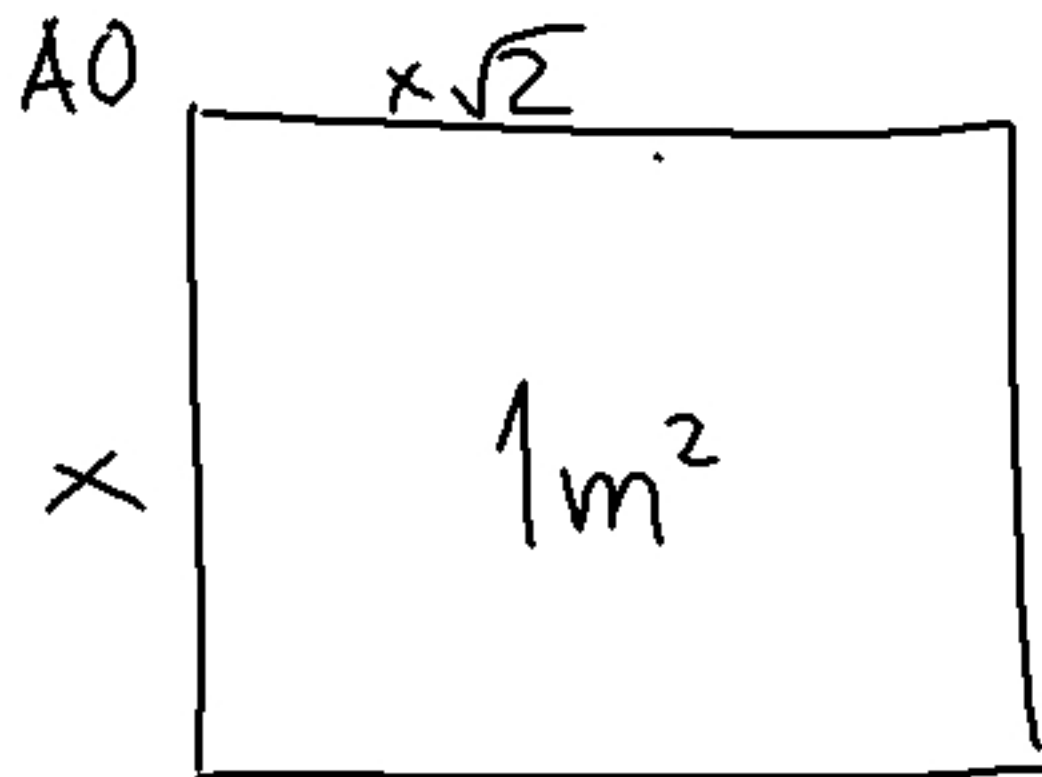
KAP. 4 REKURSION OCH INDUKTION.

rekursion är en process som (delvis)
refererar till sig själv.

Ex. Pappersformat.

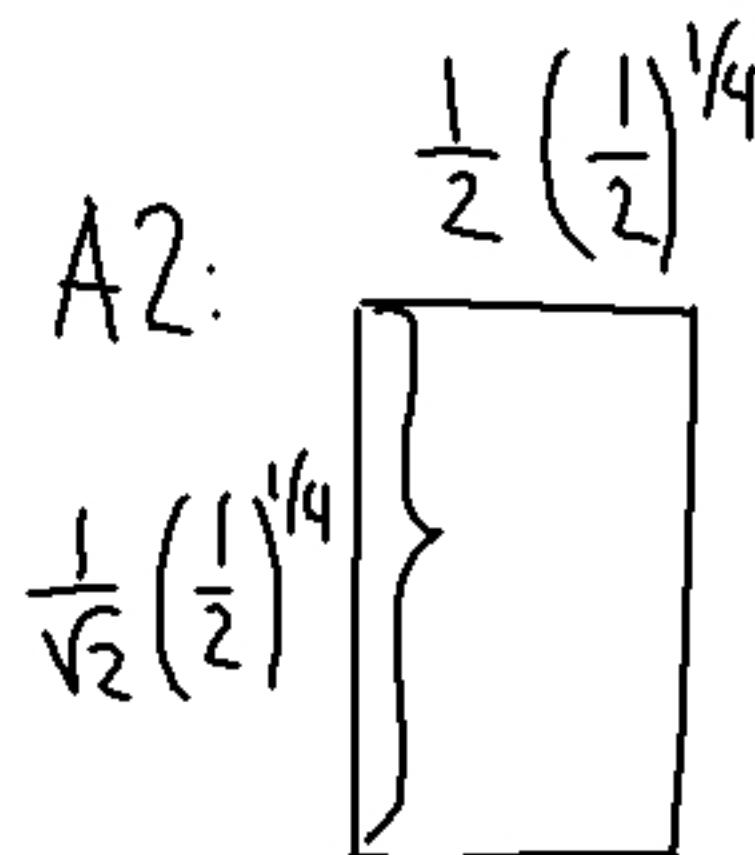
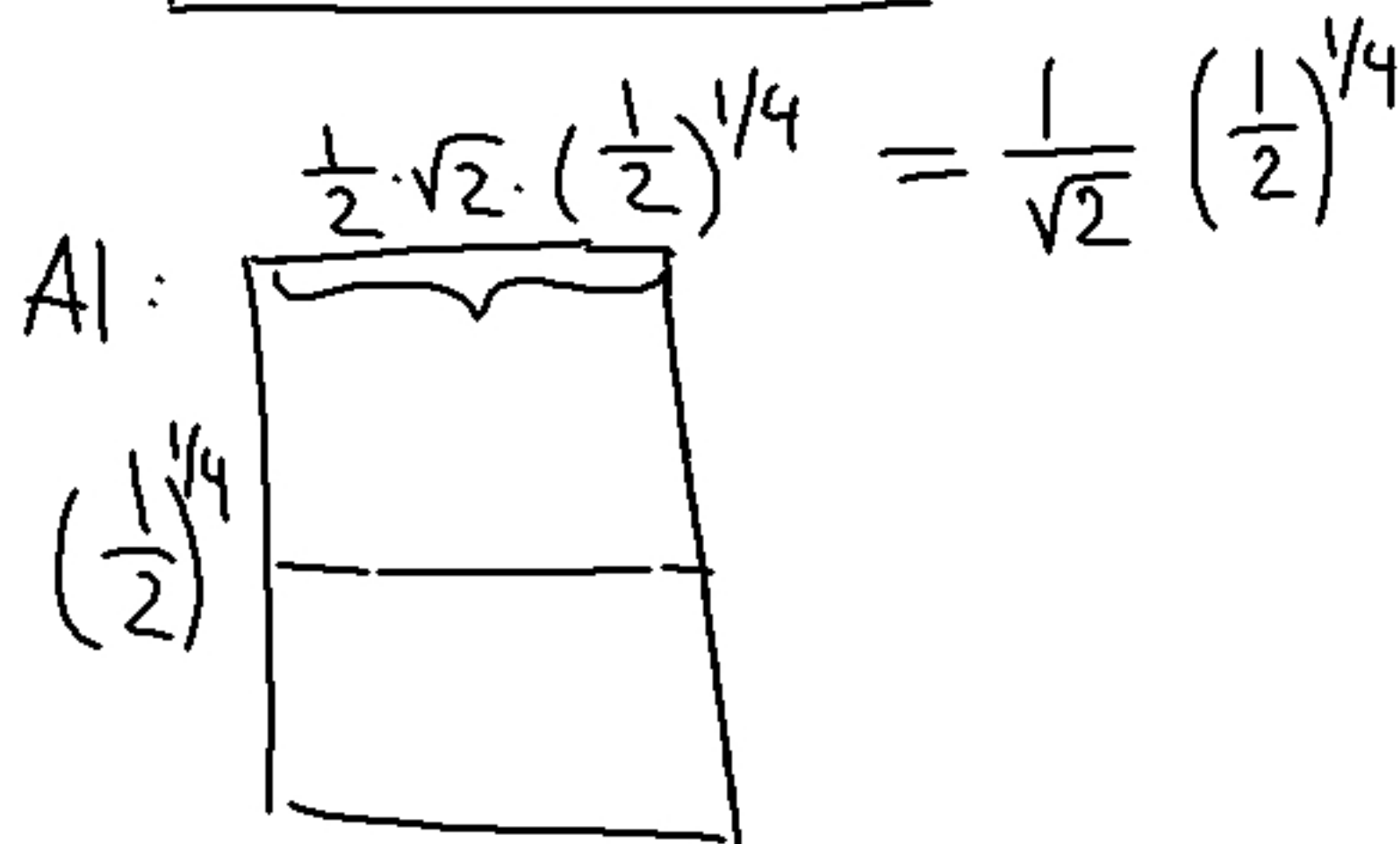
A0 är 1m^2 i area och sidorna
förhåller sig i proportionen

$1 : \sqrt{2}$
A_k fås från A_{k-1} genom att skära
den i mitten på långa sidan

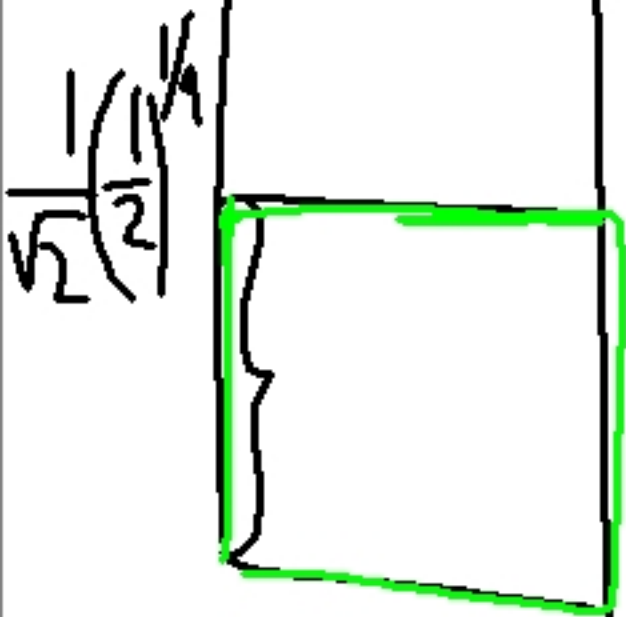


$$x^2 \sqrt{2} = 1$$

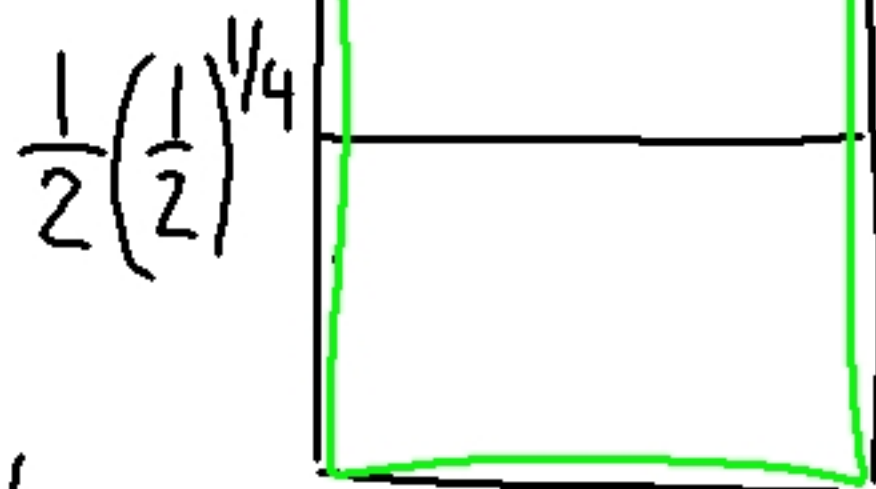
$$x^2 = 1/\sqrt{2} ; x = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/4}$$



A2: $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{1/4}$

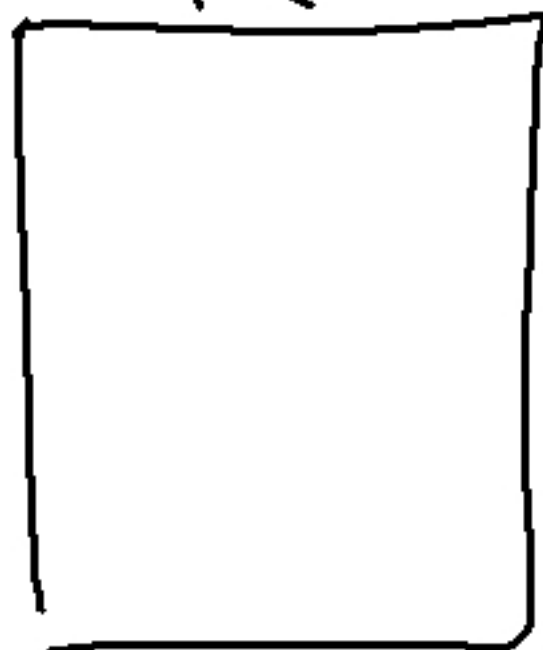


A3: $\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{1/4}$



$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{1/4}$

A4:



$\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{1/4}$

REKURSIVA TALFÖLJDER

Med $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ menar man

$a_0, a_1, a_2, \dots$

en rekursiv talföljd $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ är

en där a_k kan uttryckas
i $a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_0$ för alla k

grodan



.....



flugan

n stycken stenar

Hur många sätt finns det att ta sig till flugan?

de som börjar
med

ett hopp till sten

N_2 f_{n-1} stycken

de som f_{n-2}
börjar

med ett hopp
till sten N_3

Fibonacci's tal

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

$$f_1 = 1$$

$$f_2 = 1$$

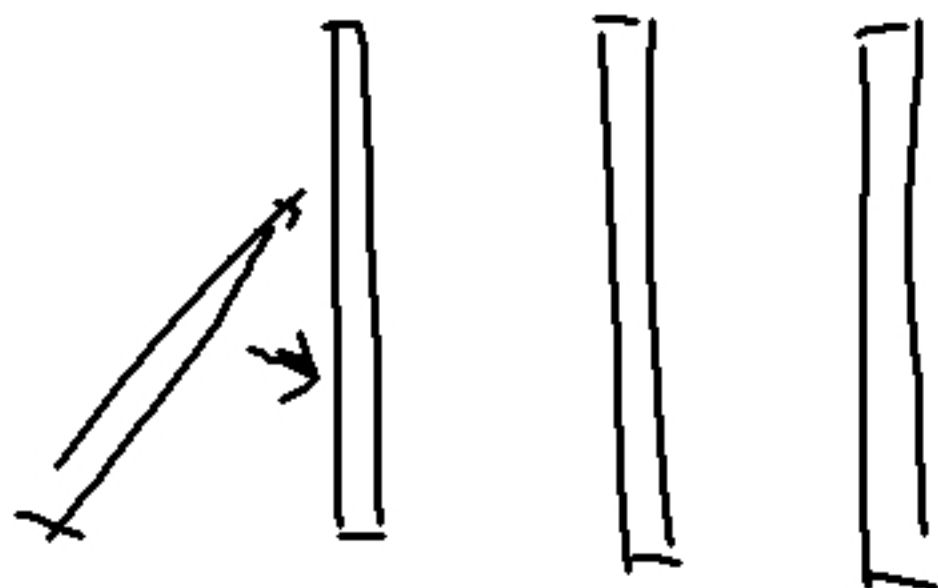
grodan
stannar
där hon är

grodan
hoppar till
sten #2.

$$f_3 = 2, f_4 = 3, f_5 = 5, f_6 = 8 \dots$$

INDUKTIONSBEVIS

Utställningssal, skärmar med foton



BAS-
STRG

→ 1.

vält skärm nr 1.

IND.
STRG

→ 2.

Står de tillräck-
ligt nära
varandra

Så kommer den
föregående skärm
välta den näst-
följande

För att bevisa ett oändligt
antal påståenden $P_1, P_2, \dots$
på en gång tillämpar man samma
princip:

1. Bassteget — bevisa P_1 (vält
första
skärmen)

2. Induktionssteget

Visa att om P_k är sann så är
"även P_{k+1} sann

Exempel.

alla positiva heltalspotenser av 6 har
6 som slutsiffra (decimal notation)

BEVIS:

1. BASSTEGET $6^1 = 6$, det slutar
på 6. Alltså OK.

2. INDUKTIONSTEGET

Antag att 6^k slutar på 6 induktions
antagande
 $\left(\begin{array}{c} P_k \\ \text{är sant} \end{array} \right)$

Då kan vi skriva 6^k som

$$(10 \cdot N + 6)$$

undersöker 6^{k+1} :

insättning

att ersätta
 6^k med
 $10N + 6$
är induktions
antagande

$$6^{k+1} = 6^k \cdot 6 = (10N + 6)6 =$$

$$P_{k+1}: 6^{k+1} \text{ slutar på } 6 = \underbrace{10 \cdot 6N + 30 + 6}_{\text{slutar på } 6}$$

ENLIGT IND. PRINCIPEN ÄR BEVISET KLART.

En rekursionsföljd definieras genom

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{n+1} = 2a_n + 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \cdot 0 + 1 = 1 = 2^1 - 1 \\ a_2 &= 2 \cdot 1 + 1 = 3 = 2^2 - 1 \\ a_3 &= 6 + 1 = 7 = 2^3 - 1 \end{aligned}$$

då kan a_n skrivas som

$$a_n = 2^n - 1$$

BEVIS:

1. BASSTEGET: $0 = a_0 = 2^0 - 1$, javisst

2. INDUKTIONSTEGET:

Antag att $a_k = 2^k - 1$ för något k . ← IND. ANTÄGANDE

Undersök nu a_{k+1} :

a_k enligt
ind. ant.

$$\boxed{a_{k+1}} = 2a_k + 1 = 2(2^k - 1) + 1 =$$

↑
enligt
den rekursiva
definitionen

$$= 2 \cdot 2^k - 2 + 1 =$$
$$= \boxed{2^{k+1} - 1}$$

P_{k+1}

Enligt induktionsprincipen är beviset klart.

Övn. 4.19

Visa att $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$ för alla $n \geq 1$

BEVIS:

1. BASSTEGET: $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$ $\frac{n=1}{\text{ja, det stämmer}}$

2. INDUKTIONSSTEGET:

antag att det är sant för $n=k$:

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{i(i+1)} = \frac{k}{k+1}$$

induktions-
antagandet

$n=k$: P_k säger att $\sum_{i=1}^k \frac{1}{i(i+1)} = \frac{k}{k+1}$
induktionsantagandet: P_k är sant.

Undersöker P_{k+1} :

$$VL_k = HL_k$$

$$VL_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i(i+1)} =$$

$$= \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} \right] + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$VL_k = HL_k$ em. ind. antagandet

$$\underline{VL_{k+1}} = \boxed{\frac{1}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{k(k+1)}} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$VL_k = HL_k$$

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2) + 1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{\overset{(k+1)^2}{\underbrace{k^2 + 2k + 1}}}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2} = \underline{HL_{k+1}}$$

enligt induktionsprincipen är beviset klart.

Visa att

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{för alla } n$$

BEVIS

1. ~~BASSTEGET~~: $n=1$, påståendet är att $VL_1 = 1$ är samma

Som

$$HL_1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

Sant, ok.

2. IND. STEGET

antag att $VL_k = HL_k = \frac{k(k+1)}{2}$ (ind. antagande)

undersök VL_{k+1}

$$VL_{k+1} = \underbrace{1+2+3+\dots+k}_{VL_k} + (k+1) = VL_k + (k+1) =$$

(evl. ind. ant.) $\Rightarrow HL_k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) =$

$$VL_{k+1} = HL_{k+1} = (k+1) \left(\frac{k}{2} + 1 \right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

evl. + induktionsprincipen är bevisat HL_{k+1} klart.

Ex. 4.21

$$n^2 < 2^n \quad \text{för alla heltal } n \geq 5$$

BEVIS

1. BASSTEGET: kollar för $n=5$:

$$25 < 32, \text{ ok.}$$

2. IND. STEG

antag att för något k $\left. \begin{array}{l} k^2 < 2^k \end{array} \right\}$ ind. antagande

(P_k är sant, $\forall L_k < H L_k$)

Undersök VL_{k+1} :

$$VL_{k+1} = (k+1)^2 = \textcircled{k^2} + 2k + 1 =$$

$$= \swarrow VL_k + 2k + 1 < HL_k + 2k + 1 =$$

enl.
ind.
antag.

$$= 2^k + \textcircled{2k+1} < 2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$$

HJÄLP SATS: $2^{k+1} < 2^k$ för alla $k \geq 3$
enl. hjälpsatsen $= HL_{k+1}$
enl. ind. principen är vi klara.

HJÄLPSATSEN

$$2_{k+1} < 2^k \text{ för } k \geq 3$$

BAS: $k = 3$

$$2 \cdot 3 + 1 = 7 < 2^3 = 8 \text{ ok.}$$

IND. STREKT: antag att $VL_p = 2_{p+1}$ är
mindre än $HL_p = 2^p$.

Undersök VL_{p+1} :

$$2(p+1)+1 = 2p+3 = \boxed{2_{p+1}} + 1$$

$\wedge 2^p$

$$\underline{\underline{VL_{p+1}}} = 2(p+1) + 1 = \underbrace{(2p+1)}_{\text{mindre än } 2^p} + 2 <$$

$$< 2^p + 2 < 2^p + 2^p = 2^{p+1} =$$

men $2 < 2^p$ ↗

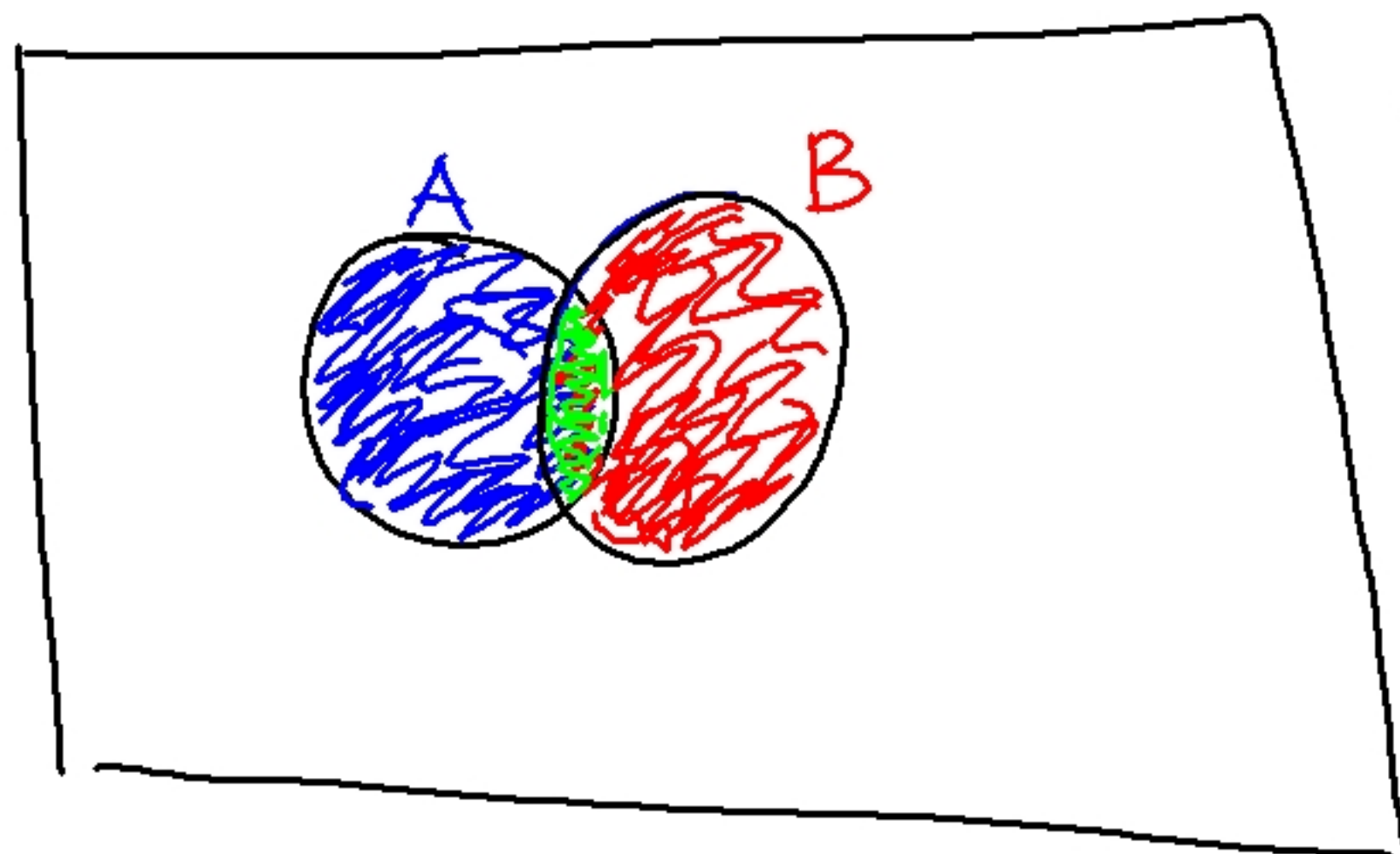
$$\text{Alltså } VL_{p+1} < HL_{p+1}$$

enligt ind. principen är vi klara.

Övn. 2.36

illustrera de Morgans lag

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$



$A \cup B$
är allt
färgat.
 $(A \cup B)^c$
är vitt

A^c är
vitt +
rött
 B^c är vitt
+ blått
 $A^c \cap B^c$
är vitt

2.37

$A =$ alla binära strängar av längd 3

$$= \{000, 001, 010, 100, 110, 101, 011, 111\}$$

$B = P(\{a, b, c\}) =$ alla delmängder av $\{a, b, c\}$

Visa att A och B har samma kardinalitet
genom att skapa en bijektion mellan
dem.

000

$\emptyset$

001

$\{c\}$

010

$\{b\}$

100

$\{a\}$

101

$\{a, c\}$

111

$\{a, b, c\}$

...

olika svarar

mot olika

varje delmängd

har en digital

foto

varje foto är

foto av någon delmängd

alltså

BIJEKTION!

4.38+4.50 Talföljden $(b_k)_0^\infty$ definieras som

$$\begin{cases} b_0 = 1 \\ b_1 = 9 \\ b_{k+2} = 6b_{k+1} - 9b_k \end{cases}$$

$$b_2 = 6b_1 - 9b_0 =$$

$$= 45$$

$$b_3 = 6 \cdot 45 - 81 =$$

$$\text{Visa att } b_k = (2k+1) \cdot 3^k, k \geq 2 \quad = 9 \cdot (30-9) =$$

BEVIS:

$$= 189$$

...

$$\text{Bas: } k=2, k=3; \quad b_3 = 189 = (2 \cdot 3 + 1) \cdot 3^3$$

$$b_2 = 45 = (2 \cdot 2 + 1) \cdot 3^2 \text{ sant. } \text{ja}$$

IND. STEG 2

antag att $b_k = (2k+1) \cdot 3^k$

$b_{k+1} = (2(k+1)+1) \cdot 3^{k+1}$

undersök b_{k+2} :

$$b_{k+2} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{enligt} \\ \text{rek. formeln}}}{6} b_{k+1} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{enl.} \\ \text{antagandet}}}{9} b_k = 6(2k+3) \cdot 3^{k+1} - 9(2k+1) \cdot 3^k$$

$$b_{k+2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{erweitert} \\ \text{rek. formeln}}}{=} 6b_{k+1} - 9b_k \underset{\substack{\uparrow \\ \text{erweitert} \\ \text{ind. antagander}}}{=} 6(2k+3) \cdot 3^{k+1} - 9(2k+1) \cdot 3^k$$

$$= 2(2k+3) \cdot \overbrace{3^{k+1} \cdot 3}^{3^{k+2}} - (2k+1) \cdot \overbrace{3^k \cdot 3^2}^{3^{k+2}}$$

$$= (4k+6 - (2k+1)) \cdot 3^{k+2}$$

$$= (2k+5) \cdot 3^{k+2} = (2[k+2]+1) \cdot 3^{k+2}$$