3.3.4 GEMENSAMMA DELARE.

$m, n, d \in \mathbb{Z}$

d gem. delare till m och n

om $d \mid m$ och $d \mid n$ -

T.ex. om $m = 12$ och $n = 24$

så är

$1, 2, 3, 4, 6, \boxed{12}$ gemensamma

delare.

STÖRST

Bland gemensamma delare till
m och n kan man alltid
välja största delaren.
(för att alla är $\leq$ m eller n)

SGD(m, n)
Största gemensamma delare

En lämplig metod för beräkning av SGD(m,n) är

<u>Euklides algoritm</u>

21 och 14:

$$21 = 14 \cdot 1 + \boxed{7}$$

$$14 = 7 \cdot 2 + 0$$

den sista icke-försvinnande resten är SGD(21,14)

$$21 = 14 \cdot 1 + 7$$

om 21 och 14 har en gemensam delare d, så måste d dela även $21 - 14 \cdot 1 = 7$

$$SGD(21,14) = SGD(14,7) = 7$$

$\underline{SGD(4734, 1914) = d}$

$4734 = 1914 \cdot 2 + 906$

$1914 = 906 \cdot 2 + 102$

$906 = 102 \cdot 8 + 90$

$102 = 90 \cdot 1 + 12$

$90 = 12 \cdot 7 + \boxed{6}$ ← SGD

$12 = 6 \cdot 2$

$d \mid 4734$ .ch

$d \mid 1914 \Rightarrow$

$\Rightarrow d \mid 906 \Rightarrow$

$\Rightarrow d \mid 102 \Rightarrow$

$\Rightarrow d \mid 90$

$\Rightarrow d \mid 12$

$\Rightarrow d \mid 6$

$\Rightarrow \boxed{d = 6}$

SATS 3.4 Om $d \mid m$ och $d \mid n$

så måste $d \mid (xm + yn)$

för godtyckligt val

av $x, y \in \mathbb{Z}$

(i Euklides algoritm

så skriver vi $m = qn + r$

och $r = qn - m$, $x = -1$, $y = q$) valet av koeff.

SATS 3.5 (sid 51)

$d = \mathrm{SGD}(m,n)$ kan skrivas som

$$d = a \cdot m + b \cdot n$$

för ett lämpligt val av a och b.

<u>Bevis</u> Kör Euklides baklänges!

$$4734 = 1914 \cdot 2 + 906$$
$$1914 = 906 \cdot 2 + 102$$
$$906 = 102 \cdot 8 + 90$$
$$102 = 90 \cdot 1 + 12$$
$$90 = 12 \cdot 7 + \boxed{6}_{\text{SGD}}$$
$$12 = 6 \cdot 2 + 0$$

BAKLÄNGES:

$$6 = 90 - 12 \cdot 7$$
$$= 90 - 7(102 - 90)$$
$$= 906 - 102 \cdot 8 - 7 \cdot (102 - 906 + 8 \cdot 102)$$
$$= 8 \cdot 906 - 71 \cdot 102$$

1) $19 = 7 \cdot 2 + 5$

2) $7 = 5 \cdot 1 + 2$

3) $5 = 2 \cdot 2 + \boxed{1}$ SGD

$2 = 1 \cdot 2 + 0$

$1 = SGD(19, 7) =$

$= 3 \cdot 19 + -8 \cdot 7$

$1 =$

$= \overbrace{5 - 2 \cdot 2}^{\text{rad 3}} =$

$= 5 - 2 \overbrace{(7 - 5 \cdot 1)}^{\text{rad 2}} =$

$= 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 =$

$= 3 \cdot \overbrace{(19 - 2 \cdot 7)}^{\text{rad 1}} -$

$- 2 \cdot 7 =$

$= 3 \cdot 19 - 8 \cdot 7$

DIOFANTISKA EKVATIONER (3.3.5)

$ax + by = c$ ← hitta alla heltalslösningar x och y.

Ex.

$$\underbrace{7x + 14y}_{\text{delbart med 7}} = 5$$

inte delbart med 7

$SGD(7,14) \nmid 5$!

<u>Alltså</u> om SGD(a,b) delar inte c så har ekvationen

$ax+by=c$ inga heltals-lösningar.

<u>Ex.</u> $38x+14y=10$

<u>STEG 1</u>: SGD$(38,14)=2$.

ekvationen kan förkortas med 2:

$$19x+7y=5$$

$$19x+7y=5 \quad (*)$$

hjälpekvation 1

$$19x+7y=1$$

$$1 = 3\cdot 19 - 8\cdot 7$$

enligt Euklides baklänges

$$x_p = 3 \; ; \; y_p = -8$$

$x = 15$, $y = -40$ löser $(*)$

hjälpekv. 2

$$19x+7y=0$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 7n \\ y &= -19n \end{aligned}, \; n \in \mathbb{Z}}$$

enda möjligheten

$x_p = 15$, $y_p = -40$ löser $19x + 7y = 5$.

Säg att vi hittar ett annat par (x_0, y_0) som löser $19x + 7y = 5$.

$$
\begin{array}{r}
19x_p + 7y_p = 5 \\
- \quad 19x_0 + 7y_0 = 5 \\
\hline
19(x_p - x_0) + 7(y_p - y_0) = 0
\end{array}
$$

alltså måste

$x_p - x_0 = 7n$

$y_p - y_0 = -19n$

för att de löser $19x + 7y = 0$

$$
\boxed{\begin{aligned} x_0 &= -7n + 15 \\ y_0 &= 19n - 40 \end{aligned}}
$$

Ex. Hitta alla heltalslösningar till

$$69x + 49y = 5$$

Euklides på 69 & 49:

$$69 = 49 \cdot 1 + 20$$
$$49 = 20 \cdot 2 + 9$$
$$20 = 9 \cdot 2 + 2$$
$$9 = 2 \cdot 4 + 1$$
$$2 = 2 \cdot 1 + 0$$

SGD

Euklides baklänges

$$1 = 9 - 4 \cdot 2 =$$
$$= 9 - 4 \cdot (20 - 2 \cdot 9) =$$
$$= 9 \cdot 9 - 4 \cdot 20 =$$
$$= 9 \cdot (49 - 2 \cdot 20) - 4 \cdot 20$$
$$= 9 \cdot 49 - 22 \cdot 20 =$$
$$= 9 \cdot 49 - 22 \cdot (69 - 49)$$
$$31 \cdot 49 - 22 \cdot 69$$

$$1 = 31 \cdot 49 - 22 \cdot 69$$

Med andra ord, talen

$x = -22$ och $31 = y$ löser $69x + 49y = 1$

$$69x + 49y = 5$$

hjälpekv. 1

$69x + 49y = 1$

$x = -22$, $y = 31$; gångra med 5

$x_p = -110$, $y_p = 155$

hjälpekv 2

$69x + 49y = 0$

$x = 49n$

$y = -69n$

Alla lösningar:

$$X = X_p + 49n = -110 + 49n$$

$$Y = Y_p - 69n = 155 - 69n$$

n väljs fritt från $\mathbb{Z}$

Ex 3.5 (sid. 56)

ett paket glödlampor kostade 67 50:öringar
ett paket trasor kostade 29 50:öringar

$$67x + 29y = \underbrace{2569}_{\text{räknat i femtiöringar.}}$$

Lösning: Lös diofantiska ekvationen först; välj sedan positiva lösningar.

$$67x+29y=2569$$

$$67x+29y=0$$

$$\begin{cases} x=-29n \\ y=67n \end{cases}$$

<u>Euklides:</u>

$67 = 2\cdot 29 + 9$

$29 = 3\cdot 9 + 2$

$9 = 4\cdot 2 + 1$ SGD

$2 = 2\cdot 1 + 0$

$1 = 9 - 4\cdot 2 = 9 - 4\cdot(29 - 3\cdot 9) =$

$13(67 - 2\cdot 29) - 4\cdot 29 = 13\cdot 9 - 4\cdot 29$

$$1 = 13 \cdot 67 - 30 \cdot 29$$

$x = 13$; $y = -30$ löser $67x + 29y = 1$

mult. med 2569:

$x_p = 33397$, $y_p = -77070$

löser

$67x + 29y = 2569$.

hom. lösn

$x = 29n$

$y = -67n$

$$\begin{cases} x = 33397 + 29n \\ y = -77070 - 67n \end{cases}$$

ett n som passar, $n = -1151$ insättning ger $\boxed{\begin{matrix} x = 18 \\ y = 47 \end{matrix}}$

x och y är antal paket och måste vara ≥ 0 då:

$$-77070 - 67n \geq 0$$

$$-77070 \geq 67n$$

$$\frac{-77070}{67} \geq n$$

$-1150{,}3$

$$33397 + 29n \geq 0$$

$$29n \geq -33397$$

$$n \geq \frac{-33397}{29}$$

$\approx -1151{,}6$