

att välja och ställa i rad

k stycken olika saker från n

stycken olika saker

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!} =$$

$$= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$$

ÖRDNADE VAL

välj k stycken ur n stycken.

$\binom{n}{k}$ måste då vara $\frac{n!}{(n-k)!k!}$

$$\underbrace{P(n, k)}_{\frac{n!}{(n-k)!}} = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{välja}} \cdot \underbrace{k!}_{\text{ordna}}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

↑
inte
välja
gröna
bollen

①

②

③

④

⑤

↑
välja
gröna
bollen

och

k-1 till

av de

n-1 som
är kvar.

$$\binom{5}{3} = \binom{4}{3} + \binom{4}{2}$$

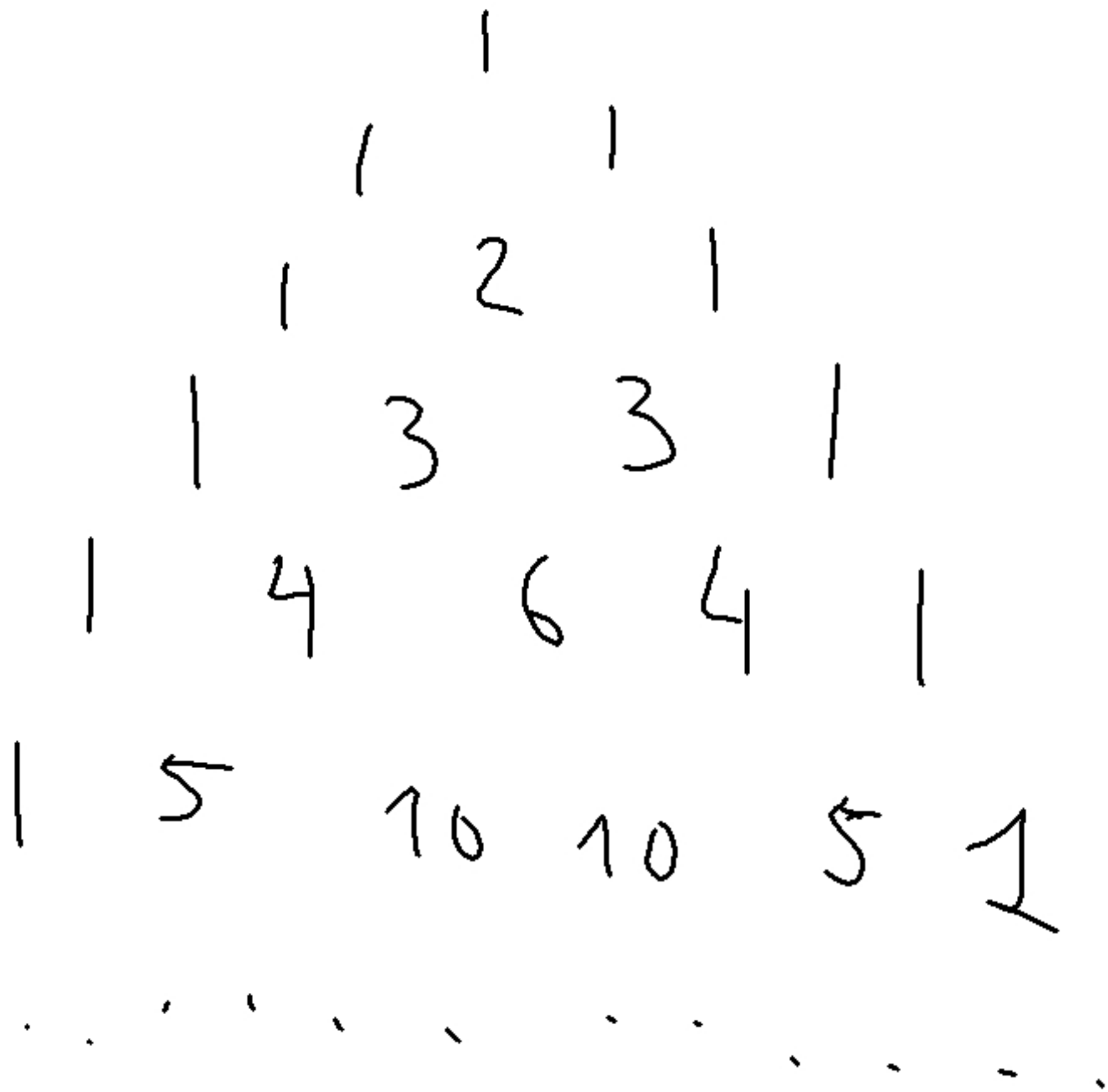
Pascals triangel

$$\begin{array}{ccccc} & & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & & \\ & & 1 & & \\ & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \\ & 1 & & 1 & \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 1 & & 2 & & 1 \end{array}$$

← urval från
"ingenting"

← från 1
grej

← från
2 grejer



52 kort + 2 jokrar, Take 2

Blanda 52 kort först; $52!$ olika
blandningar.

sen välj 2 platser bland
54 i kortleken för jokrarne
 $\binom{54}{2}$ sätt

resultatet: $52! \cdot \binom{54}{2}$

$$\binom{54}{2} = \frac{54!}{2! 52!} = \frac{53 \cdot 54}{2}$$

Samma svar som i
förra föreläsningen.

STORFAVORIT

MISSISSIPPI

Hur många "ord" med 5 bokstäver?

1. alla bokstäver är olika.

0 fall

(bara 4 olika bokstäver finns

M I S P)

2. Exakt en dublett

3
sätt att

• $\binom{5}{2}$

• 3!

välja vilken dublett

sätt
att

välja
var i ordet
finns dubletten

sätt att ordna de

□ □ □ □ □

resterande
3 bokstäver.

2. Exakt 2 dubletter.
olika

3
sätt att
välja
bokstaven
som ingår
i den första
dubletten.

$$\cdot \binom{5}{2}$$

2 $\cdot \binom{3}{2}$
sätt
att välja
bokstaven
för den
andra
dubletten

sätt
att
välja
plats
för den

2
sätt
att
välja
den
resterande
boksta-
ven.

3. En trippel (av s eller I)

$$2 \cdot \binom{5}{3} \cdot 3 \cdot 2$$

2
varianter
(s eller I)

$\binom{5}{3}$
sätt
att
välja
var den finns

3
sätt
att sätta
de kvarlevande
bokstäver.

4. En trippel och en dublett

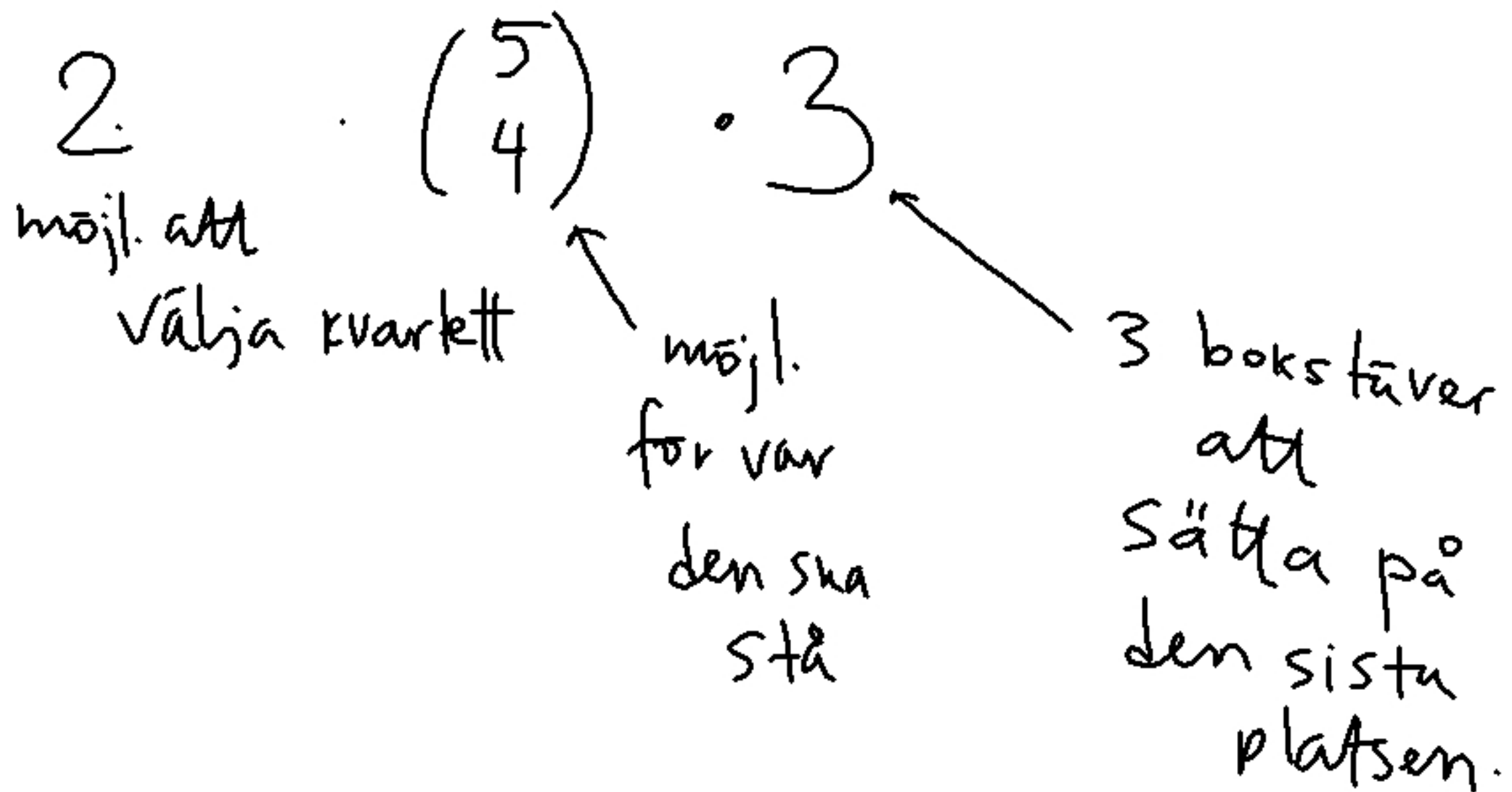
$$2 \cdot \binom{5}{3} \cdot 2$$

trippel

$\binom{5}{3}$
plats
för trippel

2
dubletten.

5. kvartett



MULTINOMIALTAL

(ordnat urval med upprepningar)

Ex. 5.5 (sid. 122)

6 signal flaggor (3 blåa, två röda, 1 vit)

Ska hissas i rad.

Hur många olika signaler finns det?

$$\binom{6}{3} \binom{3}{2} \cdot 1 = \frac{6!}{3!2!1!}$$

SATS 5.7

Antalet sätt att ordna n objekt

där man har k_1 stycken av det första

slaget

k_2 — " —

andra
slaget

$\vdots$

k_m — " —

m -te
slaget

är $\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}$

$$(k_1 + k_2 + \dots + k_m) = n$$

5.6 Postfackprincipen

Om antal postfack är $<$ antal brev, måste ett av postfacken innehålla 2 eller fler brev.

Ex (övn. 5.56, sid 125)

n tennisspelare,
alla möter alla
ingen förlorar alla matcher.

men n personer $\Rightarrow$ 2 hamnar på samma rad.

max antal
poäng $n-1$
ingen får 0.
alltså exakt
 $n-1$ rader.

Övn. 5.57

Om det finns 20 par strumpor i
tvättmaskinen, hur många
måste man få ut innan man
får tag i 2 som hör ihop?

första 20 kan vara alla olika.

N21 måste bilda ett par med
hän av dessa.

Ex. 5.10 (sid 128)

20 böcker, bokhylla med 2 hyllplan.

Sätt nr 1 ordna, sen dela

$$\binom{20}{1} 1! \cdot 19! + \binom{20}{2} 2! \cdot 18! + \binom{20}{3} 3! \cdot 17! +$$

$$+ \dots + \binom{20}{19} 19! \cdot 1! = 20! +$$
$$+ 20! + \dots + 20! =$$
$$= 19 \cdot 20!$$

Satz 2 Ordna först, dela sen

20! . 19
sätt att
ordna
böcker
sätt
att
dela
på 2 hyllplan.

5.8.2 Fördelning av identiska objekt

Exempel 10 pepparkakor, 4 personer

Hur många fördelningssätt?



N1 fick 3

N2 fick 1

N3 fick 0

N4 fick 6

$$\binom{3 + 10}{3}$$

antal pinnar antal kakor

Samma: hur många lösningar har
ekvationen ($\sum$ och ≥ 0)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \quad ?$$

$$\binom{3+10}{3} = \binom{13}{3}$$

ekv. $x_1 + x_2 + \dots + x_k = N$ har
 $\binom{N+k-1}{k-1}$
heltalslösningar ≥ 0

5.65 (131)

5 pers, 20 kakor. a) $\binom{20+5-1}{4}$ sätt

att fördela kackorna.

b) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$

lösningar där $x_i \geq 2$ ($x_i = 2 + y_i$)

$$2 + y_1 + 2 + y_2 + 2 + y_3 + 2 + y_4 + 2 + y_5 = 20$$

$y_i \geq 0$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 10 \leftarrow \text{antal lös} = \binom{14}{4}$$

c) Tillåtet för kakor att inte bli
uppätna.

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + \underset{\text{kakor}}{\text{inte uppätna}} = 20$$

$$\binom{20+5}{5} \text{ sätt.}$$

Övn.
5.77

16 män, 12 kvinnor. 7 personer ska
väljas
(ordnat)

a) $\binom{16+12}{7}$

b) om könen är prop. repr.? (4:3)

$$\binom{16}{4}$$

sätt att välja
männen

$$\binom{12}{3}$$

sätt
att välja
kvinnor.

c) minst en repres för varje kön?

$$16 \cdot 12 \cdot \binom{26}{5}$$

↑ ↑ ↗
repr. repr. 5 andra
män kvinnorna losers

d) Om gruppen ska vara enköhad?

$$\binom{16}{7} + \binom{12}{7}$$

Övn. 5.78

Binära strängar av längd 8.

a) Hur många?

$$2^8 = 256$$

$$\begin{array}{c} \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ 2 \text{ möjl} \cdot 2 \text{ möjl} \cdot 2 \cdot 2 \dots \\ \underbrace{\hspace{10em}} \\ 8 \text{ gr.} \end{array}$$

b) Hur många innehåller
exakt 2 ettor?

$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28$$

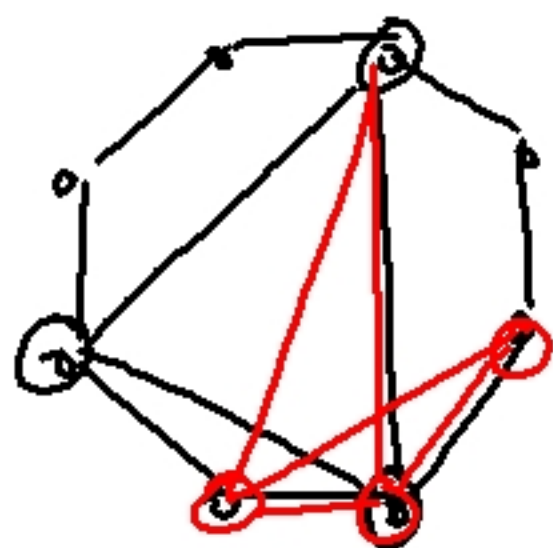
c) Hur många innehåller ett jämnt antal ettor?

$$\binom{8}{0} + \binom{8}{2} + \binom{8}{4} + \binom{8}{6} + \binom{8}{8}$$

eller

$$1 + 28 + \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{24} + 28 + 1 = 128$$

5.82



a) $\binom{8}{3}$ olika trianglar med
hörn i 8-hörningens
hörn.

b) Hur många av dessa
har inte en enda
sida som tillhör 8-hörningen?

Fall 1

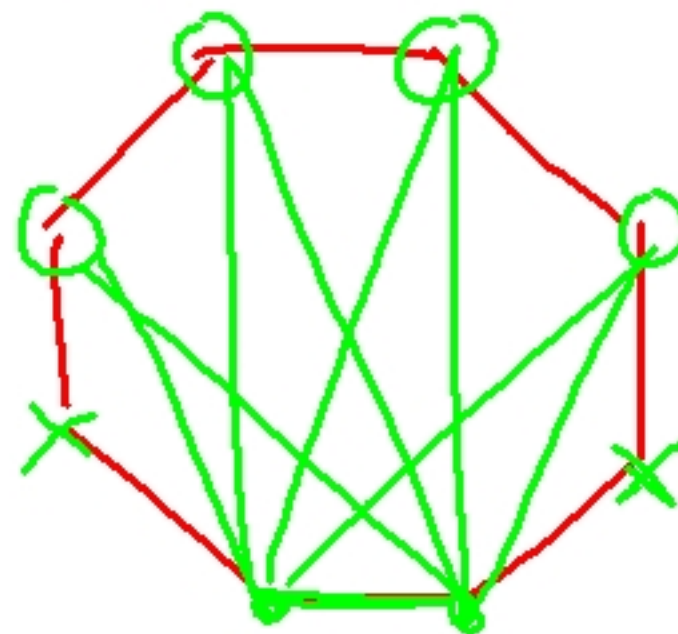
Förbjudna trianglar med 1
Sida på 8-hörningen

8

Sätt
att välja
den sidan

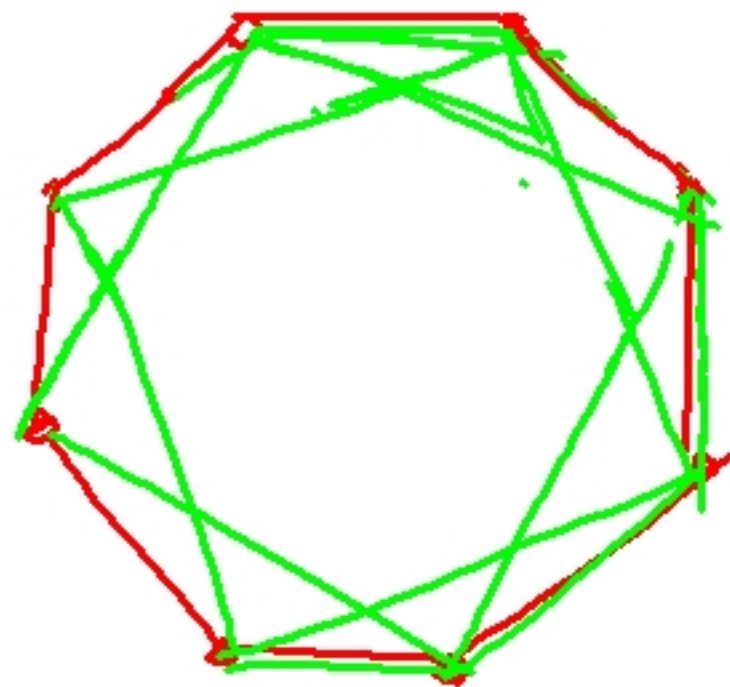
4

Sätt
att
välja
sista
hörnet



FAM 2

2 sidor
på 8-hörningen



8 stycken

$$\text{Tillåtna} = \binom{8}{3} - 40$$

alla förbjudna

(32+8)