Institutionen för matematik
KTH

Tentamensskrivning på kursen Diskret matematik för Media 1 och IT1, 5B1118, fredagen den 27 maj 2005 klockan 08.00-13.00.

Examinatorer: Olof Heden.

Tillåtna hjälpmedel: Inga.

Gränser: 20 poäng eller mer ger betyget tre, 26 poäng eller mer ger betyget fyra och 32 poäng eller mer ger betyget fem.

Övrigt: Redovisa lösningarna på ett sådant sätt att beräkningar och resonemang är lätta att följa. De elever på Mediaprogrammet som under under vårterminen 2005 blivit godkända på lappskrivning nummer i får automatiskt 3p på uppgift nummer i på del A nedan. Samma gäller de elever på IT-linjen som under höstterminen 2004 blivit godkända på lappskrivning nummer i. De får automatiskt 3p på uppgift nummer i på del A nedan. Detta gäller för $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

DEL A

1. (3p) Bestäm en lösning till den diofantiska ekvationen $37x + 45y = 1$.

   (**Obs.** Det räcker alltså att ange precis ett par av tal x och y som uppfyller ekvationen ovan.)

2. (3p) Visa t ex med hjälp av induktion att om $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ för $n = 2, 3, 4, \ldots$ och $a_0 = 2$ och $a_1 = 1$ så är $a_n = 2^n + (-1)^n$ för alla naturliga tal n.

3. (3p) Bestäm antalet heltalslösningar till ekvationen

   $$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$$

   sådana att $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$ och $x_4 \geq 0$. Svaret skall ges i formen av ett heltal.

4. (3p) Betrakta gruppen $G =< Z_{13} \setminus \{0\}, \cdot >$. Visa att mängden $H = \{1, 3, 9\}$ bildar en delgrupp till G.

   (**Anm.** För att få full poäng på denna uppgift krävs inte att du verifierar den associativa räknelagen.)

5. (3p) Betrakta gruppen $G =< Z_{13} \setminus \{0\}, \cdot >$. Mängden $H = \{1, 3, 9\}$ bildar en delgrupp till G. Bestäm samtliga sidoklasser till H i G.

6. (3p) En felkorrigerande kod C har kontrollmatrisen

   $$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   Ordet 11111 tillhör inte koden C men ligger på avståndet ett från precis ett kodord $\bar{c} \in C$. Bestäm detta ord $\bar{c}$.

DEL B

7. (5p) Bestäm den minsta positiva rest som erhålls när talet 8^{121} delas med talet 13.

8. Personerna A, B, C, D, E och F skall ställa sig på ett led. På hur många sätt kan detta ske om

a) (3p) Personerna A och B skall stå bredvid varandra.
b) (2p) Personerna A och B inte skall stå bredvid varandra.
Anm: Svaret skall ges i form av ett heltal.

9. (5p) Låt H och K vara delgrupper till samma grupp G. Visa att om $|H| = 35$ och $|K| = 27$ så gäller att $H \cap K = \{e\}$ där e betecknar identitetselementet i gruppen G.
(**Anm.** Du får använda utan att först bevisa det, att $H \cap K$ är en delgrupp till både H och K.)

10. a) (2p) Vilket är det största antal noder som en sammanhängande graf G, utan loopar och multipla kanter, kan ha om antalet kanter är lika med 37.
b) (3p) Vilket är det minsta antal noder, som en sammanhängande graf G, utan loopar och multipla kanter, måste ha om antalet kanter skall vara lika med 37.