Matematiska Institutionen
KTH

Lappskrivning nr 4, variant A, på kursen Diskret matematik, 5B1118, för IT1, tisdagen den 23 november 2004 kl 13.15-14.00.

1. Följande tabell är en multiplikationstabell, eller som läroboken säger en grupptabell, till en grupp. Svara, med motiveringar, på följande frågor: a) Är gruppen abelsk , b) Finns det något element x i gruppen sådant att $x^3 = x \circ x \circ x$ är lika med gruppens identitetselement och c) Har gruppen någon delgrupp med två element.

$\circ$	a	b	c	d	f	g
a	a	b	c	d	f	g
b	b	a	g	f	d	c
c	c	f	a	g	b	d
d	d	g	f	a	c	b
f	f	c	d	b	g	a
g	g	d	b	c	a	f

Lösningar: Gruppen är inte abelsk eftersom $cf = b$ men $fc = d$. Elementen f, g och a uppfyller $x^3 = a$. Följande delmängder är grupper med två element $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ och $\{a, d\}$.

2. Låt M beteckna mängden av hela tal som är delbara med 3. Visa att dessa tal bildar en grupp under operationen addition, dvs att $G =< M, + >$ är en grupp.

Lösning: 1) Antag n och m tillhör M, dvs $n = 3k$ och $m = 3s$ för några hela tal k och s. Då gäller att $n + m = 3k + 3s = 3(k + s)$. Eftersom $k + s$ är ett heltal så är $n + m$ delbart med tre och därmed ett element i M. Alltså är M sluten med avseende på addition.

2) Associativa lagen gäller allmänt vid addition av hela tal och gäller då speciellt vid addition av elementen i M.

3) Talet 0 tillhör M eftersom $0 = 3 \cdot 0$. Vidare gäller allmänt vid addition av hela tal att $0 + n = n$ och $n + 0 = n$.

4) Om $n = 3 \cdot k$ så $-n = 3 \cdot (-k)$ dvs $n \in M$ medför att $-n \in M$.

3. Visa att följande tabell inte är någon multiplikationstabell till en grupp:

$\circ$	1	a	b	c	d
1	1	a	b	c	d
a	a	b	1	d	c
b	b	c	d	a	1
c	c	d	a	1	b
d	d	1	c	b	a

Lösning: Associativa lagen gäller inte i denna mängd eftersom $a(bc) = aa = b$ men $(ab)c = 1c = c$.