Matematiska Institutionen
KTH

Lappskrivning nr 2, variant A, på kursen Diskret matematik, 5B1118, för IT1, onsdagen den 9 november 2005 kl 08:15-09.00. med svar

1. (3p) Visa med hjälp av ett induktionsbevis att för alla naturliga tal n gäller att $12^n - 1$ är jämnt delbart med 11.

   I. $12^0 - 1 = 0$ som ju är delbart med 11.

   II. Antag att 11 delar $12^n - 1$, dvs $12^n = 11k + 1$. Då gäller

   $$12^{n+1} - 1 = 12 \cdot 12^n - 1 = 12(11k + 1) - 1 = 11(12k + 1),$$

   dvs 11 delar $12^{n+1} - 1$.

   III. Enligt induktionsaxiomet gäller nu påståendet för alla naturliga tal.

2. Låt A, B, C och D beteckna nedanstående mängder:

   $$A = \{a, b, c, d, e\}, \quad B = \{b, c, e, g, h\}, \quad C = \{a, b, d, f, g\}, \quad D = \{d, e, f, g, h\}.$$

   Ange de element som tillhör mängderna (Endast svar räcker på denna uppgift.)

   (a) (1p) $(A \cup B) \setminus C = \{c, e, h\}$ dvs elementen c, e och h.

   (b) (1p) $B \setminus (C \cup D) = \{c\}$ dvs elementet c.

   (c) (1p) $(A \cap D) \cup B = \{d, e, b, c, g, h\}$ dvs elementen d, e, b, c, g och h.

3. Låt $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Bestäm alla delmängder D till A sådana att $D \notin A$.

   Totalt har A åtta stycken delmängder nämligen $B_0 = \emptyset$,
   $B_1 = \{\emptyset\}$,
   $B_2 = \{\{\emptyset\}\}$,
   $B_3 = \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$,
   $B_4 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,
   $B_5 = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$,
   $B_6 = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
   och $B_7 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

   Mängden A består av tre element $a_1 = \emptyset$, $a_2 = \{\emptyset\}$ och $a_3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

   Det gäller att delmängderna $B_0 = a_1$, $B_1 = a_2$, $B_4 = a_3$ som alltså tillhör A men att övriga fem delmängder inte gör det.