Matematiska Institutionen
KTH

Några grupptal inför lappskrivning 5 IT ht05.

1. Betrakta följande abstrakt definierade multiplikationstabell till en grupp G:

$$\begin{array}{c|cccccc} \circ & a & b & c & d & f & g \\ \hline a & a & b & c & d & f & g \\ b & b & a & f & g & c & d \\ c & c & f & d & a & g & b \\ d & d & g & a & c & b & f \\ f & f & c & g & b & d & a \\ g & g & d & b & f & a & c \end{array}.$$

   (a) Bestäm alla cykliska delgrupper till denna grupp. Ange också elementens ordningar.
   (b) Är gruppen själv cyklisk.
   (c) Bestäm samtliga sidoklasser till delgruppen $H = \{a, b\}$.

2. Visa att gruppen ovan är isomorf med grupperna $(Z_6, +)$ och $(Z_7 \setminus \{0\}, \cdot)$.

3. Kan en grupp som inte är abelsk vara cyklisk?

4. Kan en grupp som är abelsk vara isomorf med en grupp som inte är abelsk?

5. Gruppen $G = (Z_{17} \setminus \{0\}, \cdot)$ är cyklisk.
   (a) Bestäm tre olika generatorer till G.
   (b) Lös ekvationerna $x^4 = 1$, $x^5 = 1$ och $x^6 = 1$ i denna grupp G.
   (c) Bestäm en delgrupp H till G med åtta element och ange också alla sidoklasser till H i G.

6. Gruppen H är en delgrupp till en grupp G. Antag H består av 13 element och det finns 7 sidoklasser till H i G.
   (a) Hur många element består då G av.
   (b) Ge exempel på en grupp G med en delgrupp H som uppfyller dessa förutsättningar.

7. Visa att $(Z_{10}, +)$ är isomorf med $(Z_2, +) \times (Z_5, +)$.

8. Låt $m(2, 4, 5)$ beteckna det minsta antal element en grupp G måste ha för att innehålla element av ordningarna 2, 4 och 5. Bestäm $m(2, 4, 5)$ och bestäm en grupp G med $m(2, 4, 5)$ stycken element.

9. Elementen a och b i den abelska gruppen G har ordningarna $\sigma(a)$ respektive $\sigma(b)$.
   (a) Bestäm ordningen av $a \circ b$ om $\sigma(a) = 2$ och $\sigma(b) = 2$.
   (b) Bestäm ordningen av $a \circ b$ om $\sigma(a) = 5$ och $\sigma(b) = 7$.

10. Visa att om H och K är delgrupper till samma grupp G så kommer även $H \cap K$ att vara en delgrupp till G.