

Matematiska Institutionen
KTH

Några övningar på induktion och mängdlära inför lappskrivning nummer 2 för IT1, ht 05.

1. Visa med hjälp av induktion att $7^n + 5$ är jämnt delbart med 6 för alla naturliga tal $n = 1, 2, 3, \dots$
2. Visa med hjälp av induktion att $n^3 - n$ är jämnt delbart med 3 för alla naturliga tal $n = 1, 2, 3, \dots$
3. Visa med hjälp av induktion att $4^n - 3n - 1$ är jämnt delbart med 9 för alla naturliga tal $n = 1, 2, 3, \dots$
4. Definiera en talföljd rekursivt genom $a_1 = 1$ och $a_{n+1} = a_n + 3$ för $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ Visa att $a_n = 3n - 2$ för alla naturliga tal $n = 1, 2, 3, \dots$
5. Definiera en talföljd rekursivt genom $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ och $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} + 2$ för $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ Visa att $a_n = n^2$ för alla naturliga tal $n = 0, 1, 2, 3, \dots$
6. Definiera en talföljd rekursivt genom $a_1 = 9$, $a_2 = 21$ och $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ för $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ Visa att $a_n = 3 \cdot 2^n + 3^n$ för alla naturliga tal $n = 1, 2, 3, \dots$
7. Visa att för varje naturligt tal n gäller att

$$\sum_{k=1}^n k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

8. Visa att för varje naturligt tal n gäller att

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{2+n}{2^n}.$$

9. Låt $A = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$, $B = \{3, 2, 6, 4, 9\}$ och $C = \{2, 1, 5, 9, 8, 7\}$. Bestäm

$$(A \cup B) \setminus (B \cap C).$$

10. Låt A , B och D vare mängder i ett universum \mathcal{U} . Undersök om någon av mängderna

$$D \cap (A \cup B)^C \quad \text{och} \quad (A \cup D^C)^C \cap B^C$$

är delmängd till den andra.