

Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar till två kombinatoriktal, som vi ej hann lösa ordentlig på föreläsningstid.

- Bestäm antalet sätt att dela in en mängd med nio element i tre delmängder så att varje delmängd innehåller minst två element vardera.

Lösning

Totalt finns det $S(9, 3)$ olika sätt att dela in i tre icke-tomma delmängder. Vi måste räkna bort de fall när någon eller några av delmängderna innehåller bara ett element.

Att alla delmängder bara skulle innehålla ett element är uteslutet eftersom vi skall dela upp totalt nio element.

Fall 1 Två delmängder innehåller vardera ett element och en delmängd resterande sju element. Totalt finns $\binom{9}{2}$ sådana möjligheter eftersom vi skall välja ut de två som skall vara ensamma i sin mängd.

Fall 2 Precis en delmängd innehåller ett element de övriga minst två.

Op 1. Välj det element som skall vara ensamt i sin mängd; $n_1 = 9$.

Op 2. Dela upp övriga åtta element i två delmängder med minst två element vardera; $n_2 = ?$

Talet n_2 bestäms nu. Totalt finns $S(8, 2)$ sätt att dela in i två icke-tomma delmängder. Av dessa finns det ått fall när en av delmängderna bara innehåller ett element, ty välj detta ensamma element och lägg resterande sju i en hög. Alltså är $n_2 = S(8, 2) - 8$.

Enligt multiplikationsprincipen gäller nu att detta fall innehåller $9(S(8, 2) - 8)$ olika uppdelningar.

Svar $S(9, 3) - \binom{9}{2} - 9(S(8, 2) - 8)$.

- Bestäm antalet ord man kan bilda med hjälp av bokstäverna i ordet ITTEKNIK som inte innehåller något av orden IT resp INTE som delord.

Lösning

Antalet ord med åtta bokstäver är totalt

$$\binom{8}{2, 2, 2, 1, 1}$$

ty av de åtta positionerna skall två väljas till I:na, två till K:na och två till T:na.

Inklusion exklusion ger nu att om A betecknar mängden av ord som innehåller delordet IT och B mängden av ord som innehåller delordet INTE så kommer svaret att ges av

$$\binom{8}{2, 2, 2, 1, 1} - |A| - |B| + |A \cap B|.$$

För att beräkna $|B|$ tänker vi oss att bokstäverna I, N, T och E är ihopklustrade till ett ord INTE. Antalet möjligheter blir då med dessa ord och bokstavslappar

$$|B| = \binom{5}{2, 1, 1, 1}$$

För att få $|A \cap B|$ klistrar vi även ihop resterande I:et och T:et till en lapp IT. Nu har vi fyra lappar med ord och bokstäver att kombinera, INTE, IT, K, K. Detta går på

$$|A \cap B| = \binom{4}{2, 1, 1}$$

Återstår att bestämma $|A|$. Vi klistrar ihop ett I och ett T till IT. Läger vi nu ut alla våra lappar med ord och bokstäver kan vi få samma ord två gånger nämligen orden

X,I,T,Y,Z,IT,U resp X,IT,Y,Z,I,T,U.

Dessa ord är ju samma men kommer att uppträda två gånger. För att få antalet sådana ord klistrar vi ihop ytterligare ett I och ett T. Vi har nu två lappar med IT och fyra andra lappar med bokstäver varav två med K. Totalt finns det alltså

$$\binom{6}{2, 2, 1, 1}$$

ord med två delord IT. Det är dessa ord som kommer att räknas två gånger om vi bara bild en lapp IT. Alltså

$$|A| = \binom{7}{2, 1, 1, 1, 1, 1} - \binom{6}{2, 2, 1, 1}$$

Till slut ett **Svar:**

$$\binom{8}{2, 2, 2, 1, 1} - \left(\binom{7}{2, 1, 1, 1, 1, 1} - \binom{6}{2, 2, 1, 1} \right) - \binom{5}{2, 1, 1, 1} + \binom{4}{2, 1, 1}.$$