Institutionen för matematik
KTH

Lösning till tentamensskrivning på kursen Diskret matematik för Media 1 och IT1, 5B1118, fredagen den 27 maj 2005 klockan 08.00-13.00.

1. Euklides algoritm ger

$$\begin{aligned} 45 &= 1 \cdot 37 + 8 \\ 37 &= 5 \cdot 8 - 3 \\ 8 &= 3 \cdot 3 - 1 \end{aligned}$$

   Ur detta läser vi ut

$$1 = 8 - 3 \cdot 3 = 8 - 3(5 \cdot 8 - 37) = -14 \cdot 8 + 3 \cdot 37 = -14(45 - 37) + 3 \cdot 37 = 17 \cdot 37 - 14 \cdot 45.$$

   Svar: Till exempel $x = 17$ och $y = -14$.

2. Antag påståendet sant för alla naturliga tal mindre än n. Då gäller att

$$\begin{aligned} a_n = \ & a_{n-1} + 2a_{n-2} = 2^{n-1} + (-1)^{n-1} + 2(2^{n-2} + (-1)^{n-2}) = \\ & 2^{n-1} + (-1)^{n-1} + 2^{n-1} + 2(-1)^{n-2} = \\ & 2 \cdot 2^{n-1} + (-1)^{n-1}(1-2) = \\ & 2^n + (-1)^{n-1}(-1) = 2^n + (-1)^n \end{aligned}$$

   Eftersom påståendet gäller fór $n = 0$ och $n = 1$ gäller nu påståendet allmänt enligt induktionsprincipen.

3. Problemet motsvarar att lägga i åtta identiska bollar i fyra olika lådor. Enligt känd formel går det på $\binom{8+3}{3}$ olika sätt.

   Svar: $\binom{11}{3} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 11 \cdot 5 \cdot 3 = 165$.

4. Vi skriver upp mängdens multiplikationstabellen

$\cdot$	1	3	9
1	1	3	9
3	3	9	1
9	9	1	3

   Ur den framgår att gruppen är sluten med avseende på multiplikationen eftersom bara elementen 1, 3 och 9 finns med i tabellen. Viser att elementet 1 fungerar som identitetselement och att invers till 3 är 9 och vice versa eftersom $3 \cdot 9 = 1$ och $9 \cdot 3 = 1$. Återstår att verifiera associative lagen, men det var inget krav för fullt poäng. Alltså är vi klara ty strukturen är sluten, finns identitet och varje element har invers och operationen är associativ.

5. Allmänt gäller att sidoklasserna kan beskrivas som $Ha = \{1 \cdot a, 3 \cdot a, 9 \cdot a\}$ där $a \in G$. Vi får

   H1={1,3,9}
   H2={2,6,5}
   H4={4,12,10}
   H7={7,8,11}

   Eftersom $|H| = 3$ och $|G| = 12$ så är antalet olika sidoklasser fyra. Vi har ovan beskrivit fyra olika sidoklasser. Det måste vara de sökta sidoklasserna.

6. Då

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

som är kontrollmatrisens andra kolonn. Felet är alltså i position två. Det sökta ordet är då 10111.

7. Fermats lilla sats ser att $8^{12} \equiv 1 \pmod{13}$. Dett ger nu

$$8^{121} = (8^{12})^{10} \cdot 8 \equiv_{13} 1^{10} \cdot 8 \equiv_{13} 8.$$

Svar: 8.

8. a) Två fall. *Fall 1:* B till höger om A. Problemet motsvarar då att ställa upp figurerna AB, C, D, E på ett led. Totalt $4! = 24$ olika möjligheter.

Fall 2: B till vänster om A. Nu skall vi ställa upp BA, C, D, E på ett led. Totalt även i detta fall 4! olika sätt.

Svar: 24+24=48 möjligheter.

b) Totalt finns det $5! = 120$ olika sätt att ställa upp personerna på. I 48 av dessa fall står, enligt lösningen till a)–uppgiften, A och B bredvid varandra. Återstår alltså $120 - 48 = 72$ olika möjligheter där A och B inte står bredvid varandra.

Svar: 72.

9. Eftersom $H \cap K$ är en delgrupp till både H och K, så ger Lagranges sats att $|H \cap K|$ delar både $|H|$ och $|K|$ dvs $|H \cap K|$ delar både 35 och 27. Enda gemensamma delaren till dessa tal är ju 1. Alltså $H \cap K$ består av bara ett element. Eftersom denna mängd är en grupp och varje grupp innehåller ett identitetselement så är detta enda element just identitetselementet.

10. a) Varje sammanhängande graf G har ett spännande träd. Om grafen har v stycken noder kommer det spännande trädet att ha $v-1$ stycken kanter. Grafen G kommer då att ha minst $v-1$ stycken kanter. Största antalet noder i förhållande till antalet kanter får vi alltså när grafen är ett träd.

Det finns träd med 38 noder och 37 kanter. En sammanhängande graf med fler än 38 noder måste minst ha 38 kanter.

Svar: 38 stycken noder.

b) Flest kanter i förhållande till antalet noder får vi när vi har en komplett graf, dvs en graf där mellan varje par av noder finns precis en kant.

Kompletta grafen med nio noder har då $\binom{9}{2} = 36$ stycken kanter. Så vi måste ha minst 10 noder. eftersom den komplett garfen med 10 noder har $\binom{10}{2} = 45$ kanter kan vi ta den grafen och plocka bort kanter tills vi får en graf med 37 stycken noder.

Svar: 10 stycken noder.