Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar till några tal inför lappskrivning 1 IT ht05.

1. Bestäm största gemensamma delaren till talen 732 och 812.

   Lösning: Euklides algoritm ger

$$\begin{array}{rcllr} 812 &=& 1\cdot 732 &+& 80 \\ 732 &=& 9\cdot 80 &+& 12 \\ 80 &=& 7\cdot 12 &-& 4 \\ 12 &=& 3\cdot 4 &+& 0 \end{array}$$

   Den största gemensamma delaren är den sista ickeförsvinnande resten i Euklides algoritm. Alltså

   Svar 4.

2. Lös den diofantiska ekvationen $511x + 243y = 1$.

   Lösning: Euklides algoritm ger

$$\begin{array}{rcllr} 511 &=& 2\cdot 243 &+& 25 \\ 243 &=& 10\cdot 25 &-& 7 \\ 25 &=& 4\cdot 7 &-& 3 \\ 7 &=& 2\cdot 3 &+& 1 \end{array}$$

   Ur tabellen ovan får vi då

$$1 = 7 - 2\cdot 3 = 7 - 2\cdot(4\cdot 7 - 25) = 2\cdot 25 - 7\cdot 7 = 2\cdot 25 - 7\cdot(10\cdot 25 - 243) =$$

$$= -68\cdot 25 + 7\cdot 243 = 7\cdot 243 - 68(511 - 2\cdot 243) = -68\cdot 511 + 143\cdot 243.$$

   En lösning till den diofantiska ekvationen blir alltså

$$511\cdot(-68) + 243\cdot 143 = 1.$$

   Om x' och y' är en annan lösning, dvs

$$511\cdot x' + 243\cdot y' = 1,$$

   så skulle vi få efter en subtraktion av bägge leden i ekvationerna ovan

$$511\cdot(x'+68) + 243\cdot(y'-143) = 1 - 1 = 0, \quad \text{dvs} \quad 511\cdot(x'+68) = -243\cdot(y'-143). \quad (1)$$

   Då $sgd(511, 143) = 1$ så måste 511 dela talet $y' - 143$, dvs $y' - 143 = k\cdot 511$ eller $y' = 143 + k\cdot 511$. Detta insatt i ekvation (1) ovan ger att

$$511\cdot(x'+68) = -243\cdot k\cdot 511, \quad \text{dvs} \quad x' = -68 - 243\cdot k.$$

   SVAR: $x' = -68 - 243\cdot k$ och $y' = 143 + k\cdot 511$.

3. Bestäm en lösning till den diofantiska ekvationen $83x + 79y = 53$.

   Lösning Euklides algoritm ger

$$\begin{array}{rcrcr} 83 & = & 1 \cdot 79 & + & 4 \\ 79 & = & 20 \cdot 4 & - & 1. \end{array}$$

   Ur detta får vi

$$1 = 20 \cdot 4 - 79 = 20 \cdot (83 - 79) - 79 = 20 \cdot 83 - 21 \cdot 79$$

   och alltså

$$20 \cdot 83 - 21 \cdot 79 = 1.$$

   Multiplicerar vi nu bägge leden med 53 får vi

$$53 \cdot 20 \cdot 83 - 53 \cdot 21 \cdot 79,$$

   vilket ger ett av flera möjliga

   SVAR T ex $x = 53 \cdot 20$ och $y = -53 \cdot 21$.

4. Beräkna i ringen Z_{19} produkten $(5 \cdot 4^{-1} + 17^2 - 2^2)18$.

   Lösning Vi observerar först att $4^{-1} = 5$ eftersom

$$4 \cdot 5 = 20 \equiv_{19} 1.$$

   Vi Vi räknar nu modulo 19

$$(5 \cdot 4^{-1} + 17^2 - 2^2)18 \equiv_{19} (5 \cdot 5 + (-2)^2 - 4)(-1) \equiv_{19} (25 + 4 - 4)(-1) \equiv_{19} 6(-1) \equiv_{19}$$

$$-6 \equiv_{19} 19 - 6 = 13.$$

5. Bestäm en invers till elementen 13 och 43 i ringen Z_{64}.

   Lösning: Vi vbet att $13 \cdot 5 = 65 \equiv_{64} 1$ och alltså är inversen till 13 i denna ring lika med 5.

   Vi beräknar inversen till 43 i den givna ringen med hjälp av Euklides algoritm.

$$\begin{array}{rcrcr} 64 & = & 1 \cdot 43 & + & 21 \\ 43 & = & 2 \cdot 21 & + & 1 \end{array}$$

   Ur tabellen ovan får vi då

$$1 = 43 - 2 \cdot 21 = 43 - 2 \cdot (64 - 1 \cdot 43) = -2 \cdot 64 + 3 \cdot 43.$$

   Detta ger att $1 = -2 \cdot 64 + 3 \cdot 43$. Räkningar modulo 64 ger då att $1 \equiv_{64} -2 \cdot 0 + 3 \cdot 43$ så $43^{-1} = 3$.

6. Lös i ringen Z_{37} ekvationssystemet

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 3x & + & 5y & = & 2 \\ x & - & y & = & 1. \end{array} \right.$$

   Lösning Gausselimination ger (subtrahera ekvation två tre gånger från ekvation 1)

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 3x & + & 5y & = & 2 \\ x & - & y & = & 1 \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{rcrcr} & & 8y & = & -1 \\ x & - & y & = & 1. \end{array} \right. .$$

   Inversen till 8 bestäms med hjälp av euklides algoritm.

$$\begin{array}{rcrcr} 37 & = & 5 \cdot 8 & - & 3 \\ 8 & = & 3 \cdot 3 & - & 1 \end{array}$$

Ur tabellen ovan får vi då

$$1 = 3 \cdot 3 - 8 = 3 \cdot (5 \cdot 8 - 37) - 8 = -3 \cdot 37 + 14 \cdot 8.$$

Detta ger att $1 = -3 \cdot 37 + 14 \cdot 8$. Räkningar modulo 37 ger då att $1 \equiv_{37} -3 \cdot 0 + 14 \cdot 8$ så $8^{-1} = 14$. Nu tillbaka till ekvationssystemet. Att $8y = -1$ ger då att $14 \cdot 8y = 14 \cdot (-1)$ varur $1 \cdot y = -14 \equiv_{37} 37 - 14 = 23$. Så $y = 23$ ger insatt i andra ekvationen att $x - 23 = 1$ eller $x = 24$.

Svar: $x = 24$ och $y = 23$.

7. Bestäm samtliga x i ringen Z_8 som satisfierar $x^4 = x$.

   Lösning Antingen testar vi vart och ett av de åtta elementen och finner då att t ex $1^4 = 1$, $0^4 = 0$ osv eller så ser vi att
   $$8 \mid x(x^3 - 1)$$
   Om nu $2 \mid x$ så är x^3 jämnt och då kommer $x^3 - 1$ att vara udda. Så skall $8 \mid x(x^3 - 1)$ så måste $8 \mid x$, dvs $x \equiv_8 0$. återstår alltså att testa de udda talen. Om x vore en udda rot skulle $8 \mid x^3 - 1$. Med $x = 3$ har vi $3^3 - 1 = 26 \equiv_8 2$, med $x = 5$ har vi
   $$5^3 - 1 \equiv_8 (-3)^3 - 1 \equiv_8 -28 \equiv_8 -4$$
   och
   $$7^3 - 1 \equiv_8 (-1)^3 - 1 \equiv_8 -2.$$
   Svar: Elementen 0 och 1.

8. Skriv talet 321 på oktal form respektive binär form.

   Lösning
   $$\begin{array}{rcccc} 321 & = & 8 \cdot 40 & + & 1 \\ 40 & = & 8 \cdot 5 & + & 0 \\ 5 & = & 8 \cdot 0 & + & 5 \end{array}$$
   Alltså $(321)_{10} = (501)_8$.
   $$\begin{array}{rcccc} 321 & = & 2 \cdot 160 & + & 1 \\ 160 & = & 2 \cdot 80 & + & 0 \\ 80 & = & 2 \cdot 40 & + & 0 \\ 40 & = & 2 \cdot 20 & + & 0 \\ 20 & = & 2 \cdot 10 & + & 0 \\ 10 & = & 2 \cdot 5 & + & 0 \\ 5 & = & 2 \cdot 2 & + & 1 \\ 2 & = & 2 \cdot 1 & + & 0 \\ 1 & = & 2 \cdot 0 & + & 1 \end{array}$$
   Alltså $(321)_{10} = (101000001)_2$.

Anm. Svar och lösningar meddelas senare.