Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar till lappskrivning nr 5, variant A, på kursen Diskret matematik, 5B1118, för IT 1, onsdagen den 30 november 2005, 11.15-12.00.

1. Betrakta gruppen $G = (Z_{36}, +)$.
   (a) Ange en delgrupp H till G med 6 element.
   Lösning:
   $$H = \{6, 12, 18, 24, 30, 0\}$$
   (b) Ange två olika sidoklasser till H i G.
   Lösning:
   $$H + 1 = \{6 + 1, 12 + 1, 18 + 1, 24 + 1, 30 + 1, 0 + 1\} = \{7, 13, 19, 25, 31, 1\}$$
   $$H + 2 = \{6 + 2, 12 + 2, 18 + 2, 24 + 2, 30 + 2, 0 + 2\} = \{8, 14, 20, 26, 32, 2\}$$

2. Mängden av inverterbara element i Z_{15} bildar en grupp med avseende på multiplikation modulo 15. Undersök om denna grupp är cyklisk.

   Lösning: Ett element a i Z_{15} är inverterbart precis då $sgd(a, 15) = 1$. De inverterbara elementen är alltså
   $$G = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}.$$
   Gruppen G har åtta element. Gruppen G är alltså cykliskt om något av dessa åtta element har ordning åtta. Vi testar element för element:

   $2^4 = 1$ så ordningen av 2 är högst fyra.

   $4^2 = 1$ så ordningen av 4 är högst två.

   $7^4 = 1$ så ordningen av 7 är högst fyra.

   $8^4 = 1$ så ordningen av 8 är högst fyra.

   $11^2 = 1$ så ordningen av 11 är högst två.

   $13^4 = 1$ så ordningen av 13 är högst fyra.

   $14^2 = 1$ så ordningen av 14 är högst två.

   Inget element hade ordning åtta så

   Svar: Gruppen är inte cyklisk.

3. Låt g och h vara element i en grupp G och antag g har ordning 7 och h har ordning 8.
   (a) Vilka möjligheter finns det för antalet element i snittet av de cykliska delgrupper som genereras av g och h, dvs bestäm $| < g > \cap < h > |$.
   Lösning:
   $$| < g > \cap < h > | = 1.$$
   (b) Motivera ditt svar ovan. (Du får använda utan bevis att snittet av två delgrupper H och K till samma grupp G, alltid är en grupp och du får givetvis använda samtliga sastser som bevisats under kursens gång.)
   Lösning: Eftersom $< g > \cap < h >$ är en delgrupp till både $< g >$ och $< h >$ så gäller att antalet element i $< g > \cap < h >$ delar antalet element i både $< g >$ och $< h >$, dvs $| < g > \cap < h > |$ delar både 7 och 8. Enda möjligheten är att
   $$| < g > \cap < h > | = 1.$$