

Matematiska Institutionen  
KTH

**Lösning till lappskrivning nr 5, variant A, på kursen Diskret matematik, 5B1118, för media1, fredagen den 13 maj, 2005.**

1. Låt  $G$  beteckna gruppen  $G = \langle Z_{13} \setminus \{0\}, \cdot \rangle$ , dvs gruppen bestående av elementen skilda från noll i ringen  $Z_{13}$  med operationen multiplikation modulo 13. Bestäm en delgrupp  $H$  till  $G$  med två element och ange tre olika sidoklasser till  $H$  i  $G$ . Hur många olika sidoklasser till  $H$  finns det totalt i  $G$ . (Två sidoklasser räknas som lika om de består av precis samma element.)

**Lösning** Mängden  $H = \{1, -1\} = \{1, 12\}$  bildar en delgrupp med två element. Den är själv en sidoklass,  $H = H1$ . Två andra sidoklasser är  $H2 = \{2, -2\} = \{2, 11\}$  och  $H3 = \{3, -3\} = \{3, 10\}$

2. De inverterbara elementen i ringen  $Z_{14}$  bildar en grupp  $G$  med sex element. Visa att  $G$  är cyklisk. (Påminnelse: Ett element  $a$  i en ring  $Z_n$  är inverterbart precis då  $\text{sgd}(a, n) = 1$ .)

**Lösning** De inverterbara elementen är 1, 3, 5, 9, 11, 13 eftersom det är precis de elementen som är relativt prima till 14. Vi undersöker nu vilka delgrupper som dessa element genererar:

$$\langle 3 \rangle = \{3, 3^2 = 9, 3^3 = 13, 3^4 = 11, 3^5 = 5, 3^6 = 1\}.$$

Detta var ju alla element i den givna gruppen som alltså är cyklisk. Uppgiften är löst och vi behöver inte studera något av de resterande elementen.

**Alternativ lösning** Elementet 3 ligger i givna gruppen eftersom  $\text{sgd}(3, 14) = 1$ . Den givna gruppen har sex element så ordningen av 3 delar 6. Men eftersom  $3^2 = 9 \neq 1$  och  $3^3 = 13 \neq 1$  så är enda möjligheten att 3:s ordning är 6. Detta element är då en generator för hela gruppen som då är cyklisk.

3. Låt  $G$  vara en cyklisk grupp med 25 element och antag att  $G$  genereras av elementet  $g$ . Ange på lämpligt sätt de element i denna grupp som har ordning fem. Visa också, t ex med hjälp av känd sats, att gruppen saknar element av ordning 10.

**Lösning** Vi vet att ordningen av ett element måste dela antalet element i gruppen. Eftersom 10 inte delar 25 så finns inget element av ordning 10 i gruppen.

Elementen  $H = \{g^5, g^{10}, g^{15}, g^{20}, g^{25} = e\}$  bildar en grupp med 5 element och alla dessa element utom  $e$  har ordning 5. Om  $g^i$  skulle ha ordning 5 så skulle  $g^{5i} = g^{k \cdot 25}$  dvs  $5i = 25k$ . Detta ger att 5 delar talet  $i$ . De enda möjliga elementen är de i gruppen  $H$ .