

Matematiska Institutionen
KTH

Lösning till lappskrivning nr 5, variant B, på kursen Diskret matematik, 5B1118, för IT 1, onsdagen den 30 november 2005, 11.15-12.00.

1. Betrakta gruppen $G = (Z_{49}, +)$.

(a) Ange en delgrupp H till G med 7 element. **Lösning:**

$$H = \{7, 14, 21, 28, 35, 0\}$$

(b) Ange två olika sidoklasser till H i G .

Lösning:

$$H + 1 = \{7 + 1, 14 + 1, 21 + 1, 28 + 1, 35 + 1, 42 + 1, 0 + 1\} = \{8, 15, 22, 29, 36, 1\}$$

$$H + 2 = \{7 + 2, 14 + 2, 21 + 2, 28 + 2, 35 + 2, 42 + 2, 0 + 2\} = \{9, 16, 23, 30, 37, 2\}$$

2. Mängden av inverterbara element i Z_{15} bildar en grupp med avseende på multiplikation modulo 15. Undersök om denna grupp är cyklisk.

Lösning: Ett element a i Z_{15} är inverterbart precis då $\text{sgd}(a, 15) = 1$. De inverterbara elementen är alltså

$$G = \{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}.$$

Gruppen G har åtta element. Gruppen G är alltså cykliskt om något av dessa åtta element har ordning åtta. Vi testar element för element:

$2^4 = 1$ så ordningen av 2 är högst fyra.

$4^2 = 1$ så ordningen av 4 är högst två.

$7^4 = 1$ så ordningen av 7 är högst fyra.

$8^4 = 1$ så ordningen av 8 är högst fyra.

$11^2 = 1$ så ordningen av 11 är högst två.

$13^4 = 1$ så ordningen av 13 är högst fyra.

$14^2 = 1$ så ordningen av 14 är högst två.

Inget element hade ordning åtta så

Svar: Gruppen är inte cyklisk.

3. Låt g och h vara element i en grupp G och antag g har ordning 8 och h har ordning 9.

(a) Vilka möjligheter finns det för antalet element i snittet av de cykliska delgrupper som genereras av g och h , dvs bestäm $|\langle g \rangle \cap \langle h \rangle|$. **Lösning:**

$$|\langle g \rangle \cap \langle h \rangle| = 1.$$

(b) Motivera ditt svar ovan. (Du får använda utan bevis att snittet av två delgrupper H och K till samma grupp G , alltid är en grupp och du får givetvis använda samtliga satsar som bevisats under kursens gång.)

Lösning: Eftersom $\langle g \rangle \cap \langle h \rangle$ är en delgrupp till både $\langle g \rangle$ och $\langle h \rangle$ så gäller att antalet element i $\langle g \rangle \cap \langle h \rangle$ delar antalet element i både $\langle g \rangle$ och $\langle h \rangle$, dvs $|\langle g \rangle \cap \langle h \rangle|$ delar både 8 och 9. Enda möjligheten är att

$$|\langle g \rangle \cap \langle h \rangle| = 1.$$