

Matematiska Institutionen, KTH

**Några problem till övning 12 den 7 december, Diskret matematik IT1, ht05.**

1. Visa att om för varje par av noder  $x$  och  $y$  i en graf  $G$  med  $n$  noder gäller att

$$\delta(x) + \delta(y) \geq n - 1$$

så är grafen sammanhängande.

2. Visa att för varje bipartit graf  $G$  med  $n$  noder gäller att

$$e \leq \left(\frac{n}{2}\right)^2.$$

3. Betrakta en graf  $G$  med nodmängden  $V$  och kantmängden  $E$ . Komplement grafen  $\bar{G}$  till  $G$  har samma nodmängd  $V$  som  $G$  men  $\bar{G}$ 's kantmängd består av de kanter som inte finns i  $E$ , dvs det går en kant mellan noden  $x$  och noden  $y$  i  $\bar{G}$ , precis då kant mellan  $x$  och  $y$  saknas i  $G$ .

(a) Antag  $G$  har valenssekvensen  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_v$ . Bestäm valenssekvensen för  $\bar{G}$ .

(b) Visa att om en graf  $G$  med  $n$  noder är  $k$ -regulär så gäller att  $\bar{G}$  är  $n - 1 - k$ -regulär.

(c) Bestäm alla 5-regulära grafer med 8 noder.

4. Tas en kant bort från  $K_5$  blir den så erhållna grafen planär. Visa detta.
5. Antag  $G$  är en sammanhängande 4-regulär graf som dessutom är planär. Hur många områden har en plan ritning av  $G$  om  $G$  har 16 kanter.
6. Hur ser Eulers formel ut för en planär graf som inte är sammanhängande.
7. Visa att om samtliga cykler i den planära sammanhängande grafen  $G$  har längd minst  $k \geq 3$  så gäller att

$$e \leq \left(\frac{k}{k-2}\right)(v-2).$$

Använd sedan detta för att visa att den så kallade Petersens graf

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
b	a	a	c	b	a	d	b	c	f
c	h	d	e	d	g	f	g	h	e
f	e	i	g	j	j	h	i	j	i

inte är planär.

8. Visa att varje sammanhängande planär graf med minst tre noder har minst en nod med valens 5 eller mindre.