Matematiska Institutionen, KTH

Några grupptal till övning 7 den 23 november, Diskret matematik IT1, ht05.

1. Betrakta $G = (Z_8, +)$. Bestäm fyra olika delgrupper till G, (Obs hela gruppen räknas också formellt som en delgrupp till gruppen G). Bestäm också samtliga sidoklasser till alla de fyra delgrupper till G som du fann.

2. De inverterbara elementen i Z_{14} bildar en grupp under operationen multiplikation. Undersök om denna grupp är cyklisk.

3. Gruppen $(Z_{13} \setminus \{0\}, \cdot)$ är cyklisk. Bestäm en generator till denna grupp.

4. Den inverterbara elementen i Z_{64} bildar en grupp G. Visa att varje element $g \in G$ satisfierar $g^{32} = 1$.

5. En direkt produkt av två grupper G_1 och G_2 med operationerna $\circ_1$ resp $\circ_2$ definieras som gruppen $(G_1 \times G_2, \circ)$ där
$$G_1 \times G_2 = \{(g_1, g_2) \mid g_1 \in G_1, \quad g_2 \in G_2\} \quad \text{och} \quad (g_1, g_2) \circ (h_1, h_2) = (g_1 \circ_1 h_1, g_2 \circ_2 h_2).$$
Den direkta produkten av två grupper är alltid en grupp.

   Visa att gruppen $(Z_2, +) \times (Z_3, +)$ är isomorf med gruppen $(Z_6, +)$, men att gruppen $(Z_3, +) \times (Z_3, +)$ inte är isomorf med gruppen $(Z_9, +)$.

6. Bestäm en delgrupp med åtta element till gruppen $(Z_4, +) \times (Z_4, +)$.

7. Lå G vara en cyklisk grupp med n element och låt g vara en generator till G:
$$G = < g > = \{g, g^2, g^3, \ldots, g^n = e\}.$$
   (a) Visa att om $d \mid n$, dvs $n = kd$ för något heltal k, så gäller att elementet $h = g^d$ genererar en delgrupp H till G med k element.

   (b) Visa att om $sgd(a, n) = 1$, dvs talen a och n är relativt prima, så gäller att elementet $f = g^a$ genererar G.

8. En given grupp G har delgrupper H och K med 39 respektive 40 element. Vilket är det minsta antal m element G kan ha. Konstruera också en grupp G med m element som har delgrupper med 39 resp 40 element.

9. Visa att nedanstående tabell aldrig kan fyllas i så att det blir multiplikationstabellen till en grupp.

$\circ$	a	b	c	d	f	g	h	k	i
a	a	b							
b	b	a							
c									
d									
f									
g									
h									
k									
i									

.

10. (Svårt) Givet är en grupp med identitetselement e. Visa att om $a^2 = e$ för alla element a i G så är G en abelsk grupp.