KTH Matematik

5B1118 Diskret Matematik
Kontrollskrivning 1
Måndagen den 15 Mars, 2004
Lösning

(1) (3p) Betrakta följande delmängderna av $\mathbb{Z}^+$:

$$A = \{n \in \mathbb{Z}^+ | n \leq 1000 \text{ och } n = k^2, \text{ där } k \in \mathbb{Z}^+\}$$

$$B = \{n \in \mathbb{Z}^+ | n \leq 1000 \text{ och } n = h^3, \text{ där } h \in \mathbb{Z}^+\}$$

Beräkna $|A \cup B|$.

$A = \{1^2, 2^2, ..., 31^2\}$ och $\{1^3, 2^3, ..., 10^3\}$. Så $|A| = 31$ och $|B| = 10$. Enligt inklusion-exklusionsprincipen är:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Vi ska beräkna kardinalitaten av $A \cap B = \{n \in \mathbb{Z}^+ | n \leq 1000 \text{ och } n = k^2 = h^3, \text{ där } k, h \in \mathbb{Z}^+\}$. Men om $k^2 = h^3$ så $k = m^3$ och $h = i^2$ där $i, m \in \mathbb{Z}^+$. Vi ska hitta vilka elemnt in B är på formen i^6. Del finns bara $1, 64, 729$ så $|A \cap B| = 3$ och $|A \cup B| = 31 + 10 - 3 = 38$.

Svaret är **38**.

(2) (3p) Låt $m \in \mathbb{Z}^+$. Visa, med hjälp av induktion, att

$$\text{Om } a \equiv_m b \quad \text{då} \quad a^n \equiv_m b^n \quad \text{för } n \geq 1$$

Detta är sant för $n = 1$. Antag att $a^n \equiv_m b^n$ gäller för $n \leq k$. Vi ska visa att $a^{k+1} \equiv_m b^{k+1}$.

$$a^{k+1} = a \cdot a^k \equiv_m b \cdot b^k = b^{k+1}$$

eller:

$a \equiv_m b$ betyder att $a = mt + b$, där $t \in \mathbb{Z}$, och $a^k \equiv_m b^k$ betyder att $a^k = hm + b^k$, där $h \in \mathbb{Z}$.

$$a^{k+1} = a^k \cdot a = (hm + b^k)(mt + b) = m(mht + hb + tb^k) + b^{k+1}$$

Så $a^{k+1} \equiv_m b^{k+1}$.

(3) (3p) Lös följande diofantiska eknation:

$$10x + 36y = 8$$

$$\begin{array}{llll} 36 & = & 10 \cdot 3 & + & 6 \\ 10 & = & 6 & + & 4 \\ 6 & = & 4 & + & \mathbf{2} \\ 4 & = & 2 \cdot 2 & & \end{array}$$

Så $sgd(36, 10) = 2$ och:

$$2 = 6 - 4 = 6 - (10 - 6) = 2 \cdot (36 - 3 \cdot 10) - 10 = 2 \cdot 26 - 7 \cdot 10$$

Par $(-7, 2)$ är EN lösning till $10x + 36y = 2$ så par $(-28, 8)$ är EN lösning till $10x + 36y = 8$. Nu ska man hitta den allmänna lösning med hjälp av lcd. Vi vet att:

$$lsd(10, 36) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 10 \cdot 18 = 36 \cdot 5$$

Så vi har att:

$$10 \cdot (-28) + 36 \cdot 8 + (10 \cdot 18 - 36 \cdot 5)k = (-28 + 18k) \cdot 10 + (8 - 5k) \cdot 36 = 8$$

Del almänna lösning är $x = -28 + 18k, y = 8 - 5k$.