KTH Matematik

5B1118 Diskret Matematik
Lösningar till Kontrollskrivning 2
Måndagen den 1 22 Mars, 2004

(1) (3p) Bestäm talet x om

$$\sum_{i=0}^{50} \binom{50}{i} 8^i = x^{100}.$$

$$9^{50} = (1+8)^{50} = \sum_{i=0}^{50} (1)^{50-i}(8)^i = \sum_{i=0}^{50} (8)^i = x^{100}.$$

Så $9^{50} = (x^2)^{50}$ och $x^2 = 9$.
Svaret är alttså $\mathbf{x = \pm 3}$.

(2) (3p) Hur många arrangemang av bokstäverna i ordet ARRANGEMANG finns det? Hur många av den har inga A intill varandra?

Det finns 11 bokstäver totalt med 3 stycken A, 2 stycken R, 2 stycken N och 2 stycken G. Antalet arrangemang är lika med den multinomialskoefficient

$$\binom{11}{3,2,2,2} = \frac{11!}{6 \cdot 8} = \mathbf{831600}$$

Om vi tar borta alla A har vi $\binom{8}{2,2,2} = \frac{8!}{8} = 7! = 5040$ många arrenemang av boståverna RRNGEMNG. För att placera 3 stycken A sådan att inga är intill varandra måste vi lägga den mellan två boståver i RRNGEMNG :

$$*R*R*N*G*E*M*N*G*$$

Vi ska välja 3 stycken $*$ bland 9 (utan upprepning och utan ordning) så vi kan välja på $\binom{9}{3}$ olika sätt.

Enligt multiplicationsprincipen är svaret:

$$5040 \cdot \binom{9}{3} = \mathbf{423360}$$

(3) (3p) Bestäm antalet heltal lösningar till ekvationen:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 32$$

med $x_i > 0$ för $i = 1, 2$, $x_3 > 2$ och $x_4 \geq 3$

Sätt $y_1 = x_1 - 1 \geq 0, y_2 = x_2 - 1 \geq 0, y_3 = x_3 - 3 \geq 0, y_4 = x_4 - 3 \geq 0$. Vi har att:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 8 = 24$$

Vi ska beräkna antalet icke-negativa lösningar till den här ekvation. Svaret är:

$$\binom{4 + 24 - 1}{24} = \frac{27 \cdot 26 \cdot 25}{3 \cdot 2} = \mathbf{2925}$$