KTH Matematik

5B1118 Diskret Matematik
Lösningar till Kontrollskrivning 4
Mondag den 3 May, 2004

(1) (3p) Betrakta följande funktion:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad f(n) = n + (-1)^n$$

(a) Är f injektiv?
(b) Är f surjektiv?
(c) Är f bijektiv?

Man kan skriva f som:

$$f(n) = \begin{cases} n+1 & \text{om } n \text{ är jämn;} \\ n-1 & \text{om } n \text{ är odd} \end{cases}$$

$f(0) = 1$ och 0 är det enda tal så att $f(0) = 1$.

(a) Antag att det finns $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ så att $f(n_1) - f(n_2)$. Vi ska visa att $n_1 = n_2$.

- Om n_1 är jämn och n_2 är odd (eller viceversa) då $f(n_1) - f(n_2)$ betyder att $n_1 + 1 = n_2 - 1$, dvs $n_1 = n_2 - 2$. Men detta är omojligt när n_1 är jämn och n_2 är odd. Man avslutar då att om $f(n_1) - f(n_2)$ så måste båda n_1, n_2 vara jämna eller odda.
- Om n_1, n_2 är jämna då $f(n_1) - f(n_2)$ ger $n_1 + 1 = n_2 + 1$ och då är $n_1 = n_2$.
- Om n_1, n_2 är odda då $f(n_1) - f(n_2)$ ger $n_1 - 1 = n_2 - 1$ och då är $n_1 = n_2$.

(b) Vi måste visa att varje $m \in \mathbb{N}$ kan skrivas som $m = n + (-1)^n$ för någon $n \in \mathbb{N}$.

- Om m är jämn då är $m+1$ odd och $f(m+1) = (m+1) + (-1)^{m+1} = m$. Så $n = m + 1$.
- Om m är odd då är $m-1$ jämn och $f(m-1) = (m-1) + (-1)^{m-1} = m$.Så $n = m - 1$
- f är bijektiv.

(2) (3p) Betrakta följande mängd:

$$F(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$$

och följande binära operation:

$$+ : F(\mathbb{R}) \times F(\mathbb{R}) \to F(\mathbb{R})$$

där $f+g$ defineras som funktionen $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ för varje $(f,g) \in F(\mathbb{R}) \times F(\mathbb{R})$ och för varje $x \in \mathbb{R}$.

Visa att $(F(\mathbb{R}), +)$ är en grupp.

(G1) Vi ska visa att operationen är associativ: Det är sant eftersom additionen är associativ på $\mathbb{R}$.

(G2) Vi ska hitta ett Identiteselemnt. Det är functionen

$$0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \ 0(x) = 0$$

Man ser att $(0+f)(x) = (f+0)(x) = f(x)+0(x) = f(x)+0 = f(x)$ för varje $f \in F(\mathbb{R})$.

(G3) Låt $f \in F(\mathbb{R})$, vi ska hitta det inverselemnt $(f)^{-1}$. Definera

$$(f)^{-1}(x) = -f(x) \quad \text{för varje } x \in \mathbb{R}$$

Denna är inverelemnt till f eftersom

$$(f+(f)^{-1})(x) = ((f)^{-1}+f)(x) = f(x) - f(x) = 0$$

(3) (3p) Betrakta följande permutationer $\sigma, \tau \in \mathbb{S}_8$:

$$\sigma = [35472816], \quad \tau = [12436587]$$

(a) Skriv σ, τ på cykelform.
(b) Bestäm σ^{-1}.
(c) Bestäm $\tau \circ \sigma^{-1}$

(a) $\sigma = (1347)(25)(68), \pi = (1)(2)(34)(56)(78)$
(b) $\sigma^{-1} = (1743)(52)(86)$.
(c) på enradform är $\sigma^{-1} = [75132846]$. Det följer att, under $\tau \circ \sigma^{-1}$ går

$$1 \to 7 \to 8, 2 \to 5 \to 6, ...$$

$$\tau \circ \sigma^{-1} = [86142735] = (1852673)(4)$$