LEKTION 03-31

Definition 0.1. Låt A och B vara två mängder. En **funktion** från A till B är en regler som till varje element $a \in A$ ordnar precis ett element $f(a) = b \in B$.

Vi använder den följande terminologi:

- $f(a)$ kallas *funktionens värde* i a.
- A kallas den *definitionsmängden.*
- $V_f = \{b \in B | b = f(a)$ för något $a \in A\} \subseteq B$ kallas *värdemängden.*
- $\Gamma_f = \{(a, f(a)|a \in A\} \subset A \times B$ kallas *grafen* av f

Notera att om A, B är ändliga mängder, kan man bilda en bipartit graf $G_f = (V, E)$ från f, genom att definera:

- $V = V_1 \cup V_2$, där $V_1 = A$, $V_2 = D_f$.
- $E = \{af(a)\}$. Så $|E| = |\Gamma_f|$.

Exempel

- Betrakta funktionen $f : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$, $f([x]) = f([x+1])$.
  - $V_f = \mathbb{Z}_n$.
  - $\Gamma_f = \{([n], [n+1])\} \subset \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$. Rita grafen!
- Reglen $f(x) = y$, där $x^2 + y^2 = 0$ inte definerar en funktion.
- Betrakta funktionen $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ defineras av $f(x) = \sqrt{x}$.
  - $V_f = \{y \in \mathbb{R}$ så att $y = \sqrt{x}$ för något$x \in \mathbb{R}^+\} = \mathbb{R}^+$.
  - $\Gamma_f = \{(x, \sqrt{x})\} \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ är en kurva.
- Funktionen $id_A : A \to A$, defineras av $f(a) = a$ kallas *identitets funktionen* av A.
  - $V_{id_A} = A$
  - $\Gamma_{id_A} = \{(a, a)\}$ kallas *diagonal* av $A \times A$.

Om $|A| = n$ *och* $|B| = m$ *det finns* m^n *funktioner från* A *till* B.

För att bilda en funktion f från A till B vi ska ordna precis ett element i B till varje element i A. Om $A = \{a_1, ..., a_2\}$, definerar f en sekvens $(f(a_1), ..., f(a_n)) \in B \times ... \times B$ (n gånger). Det betyder att det finns $|B \times ... \times B| = m^n$ många funktioner.

Definition 0.2. Låt $f : A \to B$ och $g : B \to C$ vara funktioner. Den **sammansatta funktionen** är:

$$g \circ f : A \to C \text{ och defineras av } (g \circ f)(a) = g(f(a))$$

Notera att ordning är viktig. Betrakta funktioner:

$$e^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad sin(*) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Funktionen $e^* \circ sin(*) = e^{sin(*)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ har värde $e^{sin(\pi)} = 1$ i $x = \pi$, men funktionen $sin(*) \circ e^* = sin(e^*) :: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ har värde $sin(e^\pi) \neq 1$ i $x = \pi$. Vi säger att två funktioner $f, g : A \to B$ är lika, $f = g$, om $f(a) = g(a)$ för varje $a \in A$. Så

$$e^* \circ sin(*) \neq sin(*) \circ e^*$$

Definition 0.3. Låt $f : A \to B$ vara en funktion. Den kallas **injektiv** om

$$f(a_1) = f(a_2) \Longrightarrow a_1 = a_2$$

Det betyder att för varje $b \in B$ det finns högst en $a \in A$ sådan att $f(a) = b$.

Exempel

- Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ som defineras av $f(x) = x^2$ är inte injectiv. Vi ser att $f(2) = f(-2)$, men $2 \neq -2$.
- Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som defineras av $f(x) = x + 1$ är injektiv. Vi ser att $f(a) = f(b) \Longrightarrow a + 1 = b + 1 \Longrightarrow a = b$.

Låt $f : A \to B$ vara en injektiv funktion, där $|A| = n$ och $|B| = m$. Enligt definition man näste ha att:

$$f \text{ injective } \Longrightarrow n \leq m$$

För att bilda en injektiva funktion fån A till B ska man välja n element i B, utan upprepning och med ordning. Så det finns $\frac{m!}{(m-n)!}$ många injektiva funktioner från A till B.

Definition 0.4. En funktion $f : A \to B$ kallas **surjektiv** om $D_f = B$. Det betyder att varje element $b \in B$ är värde av funktionen i någon $a \in A$.
En funktion som är injektiv och surjectiv kallas **bijektiv**. Om f är bijektiv så är varje element $b \in B$ värde av funktionen i precis en element $a \in A$.

Notera att om en function $f : A \to B$, där $|A| = n$ och $|B| = m$, är surjektive då är $n \geq m$. Vi har att:
Antalet surjektiva funktioner från A till B är:

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n$$

Vi ska visa denna formula bara för ett exempel:

Sätt $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{b_1, b_2, b_3\}$, hur mäanga funktioner som är surjektiva kan man definera?

Vi har 4^3 funktioner totalt. Om vi bestämmer antalet funktioner som inte är surjektiva kan vi dra det bort från4^3 och få svaret. Antag att $D_f \neq \{x, w, y, z\}$ och sätt $A_i = \{f \text{ så att } b_i \notin D_F\}$. Antalet funktioner som inte är surjektiva är lika med $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$.

Enligt inklusions-eklusions principen är:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3 \cap A_3|$$

Man kan se att $|A_i| = (2)^4$ efetersom vi ska beräkna funktioner från A till $B \setminus \{b_i\}$. På samma sätt är $|A_i \cap A_j| = (1)^4$ och $|A_2 \cap A_3 \cap A_3| = 0$. Vi har alltså att:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 3(2)^4 - 3(1)^4 = \binom{3}{1}(m-1)^n - \binom{3}{2}(m-2)^n$$

och svaret är:

$$4^3 - \binom{3}{1}(m-1)^n - \binom{3}{2}(m-2)^n = 4^3 - \binom{3}{1}(2)^4 - \binom{3}{2}(1)^4$$

Hur många bijektiva funktioner från A till B finns det? Om $f : A \to B$ är injektiv (bijektiv+surjektiv) då är

$$|A| = |B|$$

Antag att $|A| = n$. Varje permutation av elementen i A ger en bijektiv funktion. Det finns alltså $n!$ injektiva funktioner från A till B.

Om $|A| = n, |B| = m$ vi har att:

antalet *funktioner* från A till B	m^n
antalet *injektiva* funktioner från A till B	$\frac{m!}{(m-n)!}$
antalet *surjektiva* funktioner från A till B	$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}(m-k)^n$
antalet *bijektiva* funktioner från A till B	$n!$

Antag att funktionen $f : A \to B$ är injektiv då kan man definera en funktion $f^{-1} : B \to A$ genom

$$f^{-1}(b) = a \text{ där } f(a) = b$$

Den kallas den **inversa funktionen**. Man ser att $f \circ f^{-1} = id_B$ och $f^{-1} \circ f = id_A$

Ibland säger man att en funktion $f : A \to B$ är inverterbar, dvs att den har en invers funktion, om och endast om det finns en funktion $g : B \to A$ sådan att:

$$f \circ g = id_B \quad \text{och } g \circ f = id_A$$

Exempel Vi har visat att funktionen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ som defineras av $f(x) = x + 1$ är injektiv. Inversen defineras av $f^{-1}(y) = x$ där $f(x) = x + 1 = y$. Så $x = y - 1$.

En funktion från A till B karaketerseras av grafen Γ_f, som är en delmängd av $A \times B$ där varje element är av formen $(a, f(a))$.

Vi ska generalisera definitionen av funktionen genom att betrakta varje delmängd.

Definition 0.5. En **relation** R mellan A och B är en delmängd av $R \subset A \times B$. Ofta skriver man aRb för $(a, b) \in R$ och $a \not R b$ för $(a, b) \notin R$. Om $A = B$ relationen kallas en **binär relation**.

Exempel Betrakta mängden $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Vi definera en relation genom

$$aRb \iff a|b$$

Vi ser att $R = \{(2,2),(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4),(5,5),(6,6),(7,7)\}$.

Definition 0.6. Låt R vara en binär relation på A.

- Den kallas **riflexiv** om diagonalen $\Gamma_{id_A} \subset R$, dvs
$$aRa \quad \text{för alla } a \in A$$
- Den kallas **symmetrisk** om
$$aRb \Longrightarrow bRa$$
- Den kallas **antisymmetrisk** om
$$aRb \text{ och } bRa \Longrightarrow a = b$$
- Den kallas **transitiv** om
$$aRb \text{ och } bRc \Longrightarrow aRc$$
- Den kallas en **partiell ordning** om den är reflexiv, antisimmetrisk och transitiv.
- En partiell ordning R kallas en **total partiell ordning** om för alla a, b gäller någon av:
$$aRb \text{ och } bRa$$
- Den kallas en **ekvivalensrelation** om den är reflexiv, simmetrisk och transitiv.

Exempel

- Betrakta den följande binära relationen på $\mathbb{R}$
$$xRy \Longleftrightarrow x \leq y$$
Den är en total partiell ordning.
Om vi definera r med $x < y$ den blir inte reflexiv.
- Betrakta den följande binära relationen på $\mathbb{Z}^+$
$$xRy \Longleftrightarrow x|y$$
Den är en partiell ordning, INTE total!
- Betrakta den följande binära relationen på $\mathbb{Z}$
$$xRy \Longleftrightarrow x \equiv_n y$$
Den är en ekvivalensrelation.

Om R är en ekvalensrelation på A, kan man definera ekvivalensklassen:
$$[x]_R = \{a \in A \text{ sådan att } xRa\}$$
Man kan visa att *för varje ekvivalensrelation R på A utgör ekvivalensklasserna en partition av A.*

Definition 0.7. Låt $\underline{n} = \{1, 2, ..., n\}$ och låt A vara en mängd. Vi säger att:

- A är ändlig och har kardinalitet n, $|A| = n$ om det finns e bijektion från A till $\underline{n}$.

- A är oändlig om det inte finns någon n sådan att det finns en bijektion från A till $\underline{n}$.
- A är uppräkneligt oändlig om det finns en bijektion mellan A och $\mathbb{N}$.

Exempel

- $\mathbb{Z}$ är uppräkneligt oändlig. Betrakta bijetktionen:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & \text{för udda } n \\ \frac{-n}{2} & \text{för jämna n} \end{cases}$$

Övning

(1) Sätt $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{x, w, y, z\}$ oxh $A_1 = \{2, 3, 5\}$. Låt $g : A_1 \to B$ vara en funktion.
   - På hur många sätt kan g utvidgas till en funktion från A till B?
   - Hur många funktioner från A till B finns det?
   - Hur många injektiva funktioner från A till B finns det?
   - Hur många surjektiva funktioner från A till B finns det?
   - Hur många bijektiva funktioner från A till B finns det?

(2) Visa att $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$.

(3) (Tentamen 20030820) Definira funktionen $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ genom:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{för udda } x \\ 2x + 1 & \text{för jämna x} \end{cases}$$

Är f injektiv, surjektiv, bjektiv?

(4) Låt A, B vara två ändliga mängder med samma kardinatiteten. Visa att en funktion från A till B är injektiv om och endast om den är surjektiv. Förklara att det följer att:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^n = n!$$

(5) Visa att för varje ekvivalensrelation R på A utgör ekvivalensklasserna en partition av A.