LEKTION 03-11

Rekursion

En *talföljd* kan defineras genom att man anger en explicit formel. Till exempel betrakta sekvensen

$$\{a_n = n^2\}_{n\in\mathbb{N}}$$

Men det är mycket vanligt att talföljden defineras via en *rekursions formula.* Det betyder att man anger hur varje element kan beräknas ur den föregående element. Ett exempel är:

$$a_n = a_{n-1} + 2n - 1 \text{ för } n \geq 1 \text{ och } a_0 = 0$$

$a_0 = 0$ kallas begynnelsevärde.

Detta anger följden $\{0, 1, 4, 9, 16, ...\}$.

Man kan ha mer komplicerade rekursion formuler. *Fibonacciföljden* är ett exempel på följd där man behover två föregående element fï att beräkna den följande element:

$$\begin{cases} F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \qquad n \geq 2 \\ F_1 &= 1 \\ F_0 &= 0 \end{cases}$$

Induktion

Vi ska använda symboler $\sum$ och Π på följande sätt.

- $\sum_{i=1}^n s_i = s_1 + ... + s_n$
- $\Pi_{i=1}^n s_i = s_1 \cdot ... \cdot s_n$.

Exempel.

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + ... + n^2$$

Vi har att

- Om $n = 1$ då blir summan $1 = \frac{1(1+1)(2\cdot1+1)}{6}$,
- Om $n = 2$ då blir summan $5 = \frac{2(1+2)(2\cdot2+1)}{6}$,
- Om $n = 3$ då blir summan $14 = \frac{3(1+3)(2\cdot3+1)}{6}$.

Hur kan man visa att:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(1+n)(2\cdot n+1)}{6} \text{ gäller för } n \geq 1?$$

När vi vill visa att en sats $P(n)$ gäller för alla naturliga tal $n \geq a$ är det ofta bra att använda *INDUKTIONSPRINCIPEN*:

(1) visa $P(a)$ gäller, dvs visa att satsen är sant för $n = a$. Detta kallas *bassteget*.
(2) Antag $P(n)$ gäller för $n \leq k$ och visa $P(k+1)$, dvs antag att satsen är sant för $n \leq k$ och visa sedan den for $n = k+1$

När man har verifierat steg (1) och (2) har man , enligt induktions pricipen, visat satsen gäller för alla $n \geq a$.

BEVIS: Vi ska bevisa att $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(1+n)(2\cdot n+1)}{6}$ för $n \geq 1$.

(1) Detta är sant för $n = 1$ (vi beräknade det).
(2) Antag att

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(1+n)(2\cdot n+1)}{6} \text{ gäller för } n \leq k$$

Vi ska visa att

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(1+k+1)(2\cdot(k+1)+1)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Vi har att:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2 = \frac{k(1+k)(2\cdot k+1)}{6} + (k+1)^2$$

Och då

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(1+k)[k(2\cdot k+1)+6(k+1)]}{6} = \frac{(1+k)(2k^2+7k+6)}{6} =$$

$$= \frac{k+1(1+k+1)(2\cdot(k+1)+1)}{6}$$

Så, enligt induktionsprincipen gäller $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(1+n)(2\cdot n+1)}{6}$ för alla $n \geq 1$.

Exempel: Beviset av en del av välordningspricipen.

Vi vill visa att alla icke-tomma ändliga delmängder B av $\mathbb{Z}^+$ innehåller ett minsta element.

Vi ska visa den med hälp av induktion på kardinaliteten av delmägden.

(1) Om $|B| = 0$ det finns ingenting att visa, så satsen är sant.

(2) Antag att satsen är sant för varje delmängd B med kardinaliteten $\leq k$. Vi ska visa att satsen är sant för varje B med $|B| = k+1$. Betrakta en delmängd $B = \{a_1, ..., a_{k+1}\}$. Enligt induktionsantagandet har delmängden $\{a_1, ..., a_k\}$ ett minsta element m. Om $m \leq a_{k+1}$ så är m det minsta element av B. Annars är $a_{k+1} < m$ som betyder att a_{k+1} är det minsta element av B.

Exempel. Visa att $n^2 > 7n + 1$ för alla $n \geq 8$.

(1) Satsen är sant för $n = 8$ eftersom $64 > 56 + 1$.
(2) Antag $n^2 > 7n + 1$ för alla $n \leq k$. Vi ska visa att $(k+1)^2 > 7(k+1) + 1$. På grund av induktionsantagandet är $(k+1)^2 = k^2 + 2k + 1 > 7k + 1 + 2k + 1$. Då 2k-6har vi att $(k+1)^2 > 7(k+1) + 1 + (2k-6) > 7(k+1) + 1$ eftersom $k \geq 8$ gäller $2k - 6 > 0$.

Exempel. Visa att 6 är en delare till alla heltal på formen $8^n - 2^n$, för $n \in \mathbb{Z}^+$.

(1) Satsen är sant för $n = 1$ eftersom $6|8-2$.
(2) Antag att $6|8^n - 2^n$ för alla $n \leq k$. Vi ska visa att $6|8^{k+1} - 2^{k+1}$. På grund av induktionsantagandet är $8^k - 2^k = 6h$ där $h \in \mathbb{Z}$. Det följer att:

$$8^{k+1} = 8 \cdot 8^k = 8(2^k + 6h) = (2+6)(2^k + 6h) = 2(2^k + 6h) + 6(2^k + 6h) = 2^{k+1} + 6(18h + 2^k)$$

Så $8^{k+1} - 2^{k+1} = 6(18h + 2^k)$ som betyder att $6|8^{k+1} - 2^{k+1}$

Övning

(1) Räkna upp elementen av Fibonacciföljden.
(2) Visa, med hjälp av induktion, att $n! > 2^n$ för $n \geq 4$.
(3) Visa att

$$\sum_{i=n}^{2n-1} (2i + 1) = 3n^2 \text{ för alla } n \in \mathbb{Z}^+$$