LEKTION 03-24

Lt a, b vara noder i en graph G. En **väg** från a till b defineras som en elternande foljd av noder och kanter

$$a = a_0, e_1, a_1, e_2, ..., e + n, a_n = b$$

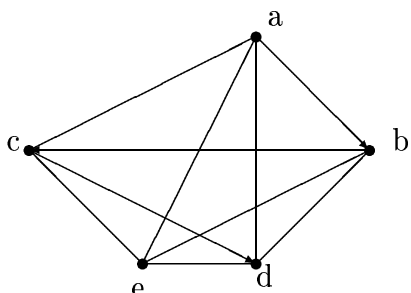
sådan att $e_i = a_{i-1}a_i$ och sådan att inte använder samma kant flera gånger. Talet n kallas vägens längt.

Vi ska betekna vägen bara med $a_1 a_2 ... a_n$.

- Två noder a och b kallas **grannar** om ab är en kant i grafen.
- En väg som passerar varje nod högst en gång kallas en **enkel väg** eller en stig.
- En väg som börjar och slutar i samma nod och som passerar andra noder högst en gång kallas en **cykel**.
- En väg som inte är en cykel kallas en **oppen väg**.

Exempel.

K_5 :



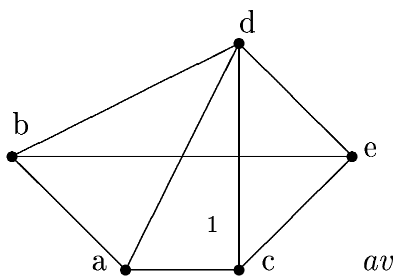
$abcde$ är en enkel oppen väg från a till e, av längt 4.

$abcdbe$ är en icke-enkel väg från a till e av längt 5.

Övning: Beräkna alla cyklar i K_5.

Avståndet mellan två noder a, b är längden av den kortaste väg från a till b. Vi ska betekna det med: $av(a, b)$

Exempel.

- Avståndet mellan varje par noder i K_n är lika med 1.
- Betrakta grafen W_4:  $av(d, e) = 1$, $av(e, a) = 2$.

Definition 0.1. Låt $G = (V, E)$ vara en enkel graf och $v \in V$ vara en nod av G. Med **valensen** eller **graden** av v, $deg(v)$, menas antalet kanter som är ändpunkt i v.

Exempel.
För varje nod v i K_n gäller $deg(v) = n - 1$. Valencer av noder berår på antalet kanter, på grund av följande satsen:

SATS. Låt $G = (V, E)$ vara en enkel graf. Då är:

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|$$

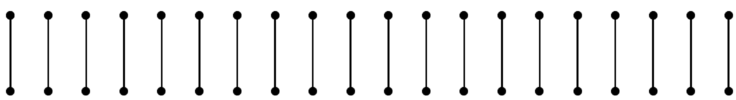
Bevis. Varje kant $e = ab$ ger bidraget 1 till $deg(a)$ och $deg(b)$. Så varje kant ger bidraget 2 till $\sum_{v \in V} deg(v)$.

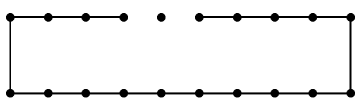
Exempel.

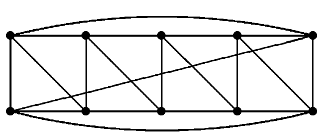
- Det är klart att om en graf har n noder är $0 \leq deg(v) \leq n - 1$ för varje nod v.
  Om en graf G har n noder och $deg(v) = n - 1$ för varje nod i G är alla par noder förbunda. Så $G = K_n$.
  Om $G \neq K_n$ kan man säga att $deg(v) \leq n - 2$ för någon nod i G.
- Om en graf har alla noder med udd grad så är antalet noder jämt.
- En enkel graf har 20 kanter, och alla noder har samma grad. Hur många noder har grafen?
  Antag att grafen har n stycken noder och $deg(v) = k$ för varje nod v. Det gäller att

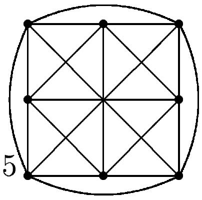
$$kn = 2 \cdot 20 = 2^3 \cdot 5$$

Det finns alltså 4 olika alternativ:

(1) $n = 40, k = 1$: 

(2) $n = 20, k = 2$ 

(3) $n = 10, k = 4$: 

(4) $n = 8, k = 5$ 

Grafen (a) är en ej-sammanhängande (connected) och har 20 komponenter.

Definition 0.2. En graf kallas **sammanhängande** om varje två noder kan förbindas.

En nod som är inte förbindat till ingen annan nod kallas isolerade.

Definition 0.3. Låt G vara en graf. Då kallas grafen $G' = (V', E')$ en **delgraf** till G om $\emptyset \neq V' \subseteq V$ och $E' \subseteq E$.

Notera att varje graf med n noder kan tänkas son en delgraf av en kompletta graf K_n. Då kan vi definera:

Definition 0.4. Låt G vara en graf med n noder. Med **komplement** $\overline{G}$ menas den delgraf av K_n som innehåller alla noder av G och alla kanter som inte finns i G.

Exempel. Låt G vara en enkel grak med n noder sådan att G har 175 kanter och dess komplement 56 kanter. Brstäm n.

grafen K_n har $\binom{n}{2}$ kanter, dt här talet måste vara lika med antalet kanter i G plus antalet kanter i $\overline{G}$:

$$231 = 175 + 56 = \binom{n}{2} \leftrightarrow 231 = \frac{n(n-1)}{2}$$

Vi ska lösa ekvationen $n^2 - n - 462 = 0$ som har lösningar $n = 22, -21$. Det är klart att $n = -21$ är ejgodkänt, så svaret är $n = 22$.

Övning

(1) Sju städer A, B, C, D, E, F, G är förenade med ett vägsystem på följande sätt:
- En väg går mellan A och C och passerar därvid B.
- En väg går från C till i ordning D, B, F.
- En väg går från D genom E till A.
- en väg går från F till B via G.
- en väg går mellan D och G.

(a) Rita en graf med städerna som noder som beskriver denna situation.
(b) Ange alla enkla vägar från G till A.
(c) Är det möjlight att starta i C och passera samtliga städer precis en gång och sedan återvända till C?

(2) Bestäm $|V|$ om grafen $G = (V, E)$ har 9 kanter och varje nod har grad 3.

(3) En viss graf G har n noder, alla av grad 4, I dess komplement har alla noder grad 6. Bestäm n.
(4) Hur många delgrafer $H = (V, E)$ i K_6 uppfyller $|V| = 3$?
(5) Antag att grafen G har 20 stycken kanter och att alla noder har samma grad. Hur många noder har grafen?
(6) Visa att om G är en sammanhängande graf finns det en enkel väg mellan två godtyckliga noder.