Svar och lösningsförslag till ks1, 14 februari 2007, i 5B1118 Diskret matematik för CL2 och CL3

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p. Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)

		sant	**falskt**
a)	Det tal som i bas 7 skrivs 345 skrivs i binär form 10110011. [$(345)_7$ är jämnt (=180), $(10110011)_2$ udda (=179).]		×
b)	Om a, b och c är heltal och $a \mid bc$, så måste minst en av $a \mid b$ och $a \mid c$ gälla. [$6 \mid 2 \cdot 3$, men $6 \nmid 2$ och $6 \nmid 3$.]		×
c)	För alla ändliga mängder A och B gäller $\boldsymbol{|A \times B| = |A| \cdot |B|}$. [Ja, så är det.]	×	
d)	Om A och B är mängder så att $A \cap B^c = \varnothing (= \{\})$ gäller säkert att $\boldsymbol{A \subseteq B}$. [Javisst, rita t.ex. ett Venn-diagram.]	×	
e)	Varje **injektion** $f : \{1, 2, 4\} \to \{2, 4, 6\}$ är också en **bijektion**. [Ja, samma kardinalitet, så precis en pil till varje element.]	×	
f)	Det finns minst en ekvivalensrelation som är antisymmetrisk. [Ja, relationen = (likhet).]	×	

2a) (1p) Låt $A = \{1, 2, 3\}$. Ange minst 3 olika element i $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$. ($\mathcal{P}(X)$ betecknar, som vanligt, X:s potensmängd.)

Lösning:

Elementen i $\mathcal{P}(A)$ är alla delmängder till A, så elementen i $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ är alla delmängder till $\mathcal{P}(A)$, dvs alla mängder vars element är delmängder till A.

Ex. på **Svar:** $\boldsymbol{\varnothing, \ \{\{1\}, \{1, 3\}\}, \ \{\varnothing, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}}$.

---

b) (1p) Vad menas med (dvs hur definieras) att mängden A är **uppräkneligt oändlig** (också kallat "uppräknelig")?

Lösning:

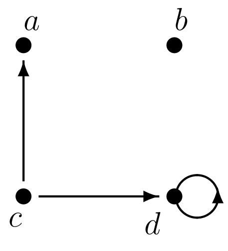
Det finns en **bijektion** $f : \mathbb{N} \to A$.

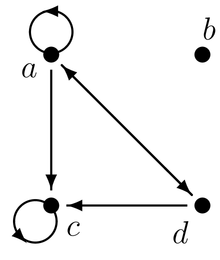
---

c) (1p) I figuren visas en (graf för en) relation.
Lägg till **så få** nya pilar **som möjligt**, så att den relation grafen sedan beskriver är **symmetrisk** och **transitiv**.

Lösning:

Symmetrin ger pilar ac och dc. Transitiviteten ger då pilar ad, da, cc och aa. Den högra figuren visar de nya pilarna, totalt 6 stycken.





3) (3p) Avgör om 64 är **inverterbart** i $\mathbb{Z}_{179}$. Om det är det, bestäm inversen.

Lösning:

$64 = 2^6,\ 2 \nmid 179$, så $\text{sgd}(64, 179) = 1$ och 64 är inverterbart i $\mathbb{Z}_{179}$.
För att finna inversen använder vi **Euklides algoritm**:

$179 = 2 \cdot 64 + 51$	$1 = 13 - 12 = 13 - (51 - 3 \cdot 13) =$
$64 = 1 \cdot 51 + 13$	$= -51 + 4 \cdot 13 = -51 + 4(64 - 51) =$
$51 = 3 \cdot 13 + 12$	$= 4 \cdot 64 - 5 \cdot 51 = 4 \cdot 64 - 5(179 - 2 \cdot 64) =$
$13 = 1 \cdot 12 + 1$	$= -5 \cdot 179 + 14 \cdot 64$

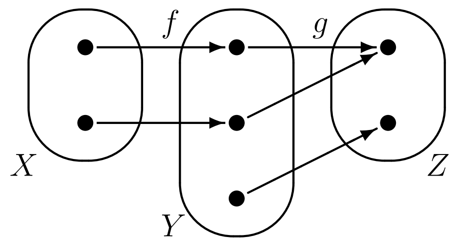
Vi får $64 \cdot 14 = 1 + 5 \cdot 179$, så **Svar: $\mathbf{64^{-1} = 14}$ i $\mathbb{Z}_{179}$.**

---

4) (3p) Ge (t.ex. genom att rita en figur med punkter och pilar) exempel på mängder X, Y, Z och funktioner $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$, så att f är injektiv och g är surjektiv, men sammansättningen gf (också skrivet $g \circ f$) varken är injektiv eller surjektiv.
Det skall tydligt framgå vad det innebär att en funktion är injektiv respektive surjektiv.

Lösning:

Eftersom f är injektiv, tar den olika $x \in X$ till olika $y \in Y$, men gf skall inte vara injektiv, så minst två av dessa y:n skall av g tas till samma $z \in Z$.
Eftersom g är surjektiv, finns för varje $z \in Z$ minst ett $y \in Y$ så att $z = g(y)$, men eftersom gf inte skall vara surjektiv skall det för något av dessa y inte finnas något $x \in X$ så att $y = f(x)$.
Enklaste exemplet visas i figuren.



---

5) (3p) Låt, som vanligt, **fibonaccitalen** $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ definieras av

$$\begin{cases} F_0 = 0,\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n = 2, 3, \ldots \end{cases} .$$

Visa med induktion att F_n och F_{n+1} för $n = 0, 1, \ldots$ är relativt prima, dvs att

$$\text{sgd}(F_n, F_{n+1}) = 1$$

(sgd, största gemensamma delaren, betecknas i kursboken ”gcd”).

Lösning:

Vi skall visa påståendet $P(n) : \text{sgd}(F_n, F_{n+1}) = 1$ för $n \in \mathbb{N}$.
Bas: $F_0 = 0,\ F_1 = 1$, så $\text{sgd}(F_0, F_1) = 1$, dvs $P(0)$ sann.
Steg: Antag $P(k)$, dvs att $\text{sgd}(F_k, F_{k+1}) = 1$.
Eftersom $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ och $F_{k+2} - F_{k+1} = F_k$ är varje gemensam delare till F_{k+1} och F_k också en delare till F_{k+2} och varje gemensam delare till F_{k+2} och F_{k+1} är också en delare till F_k. Således $\text{sgd}(F_{k+1}, F_{k+2}) = \text{sgd}(F_k, F_{k+1}) = 1$, dvs $P(k+1)$, och vi har visat att $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, **steget är klart**.
Induktionsprincipen ger nu att $P(n)$ är sann för alla $n \in \mathbb{N}$, **saken är klar**.
I själva verket gäller $\text{sgd}(F_m, F_n) = F_{\text{sgd}(m,n)}$, men det är lite svårare att visa.