**Svar och lösningsförslag till extra-ks2, 23 maj 2007,**
**i 5B1118 Diskret matematik för CL2, CL3 och Media1**

**1)** (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p.
Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

| | | sant | falskt |
|---|---|---|---|
| **a)** | $S(n,k)$ betecknar antalet sätt att dela in en mängd med $n$ element i $k$ stycken icketomma delmängder. Ja. | X | |
| **b)** | $n!$ är antalet sätt att ordna $n$ personer i en kö. Ja, det är antalet sätt välja olika personer till de $n$ platserna. | X | |
| **c)** | $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. Ja, det är rekursionsformeln för binomialtalen. | X | |
| **d)** | Antalet funktioner från $\{1,2,3\}$ till $\{a,b,c,d\}$ är $3^4$. Nej, det är $4^3$. | | X |
| **e)** | $\binom{5}{1,1,1,1,1} = 5$. Nej, den är $5! = 120$. | | X |
| **f)** | Om $A \cap B = \emptyset$ så gäller att $\lvert A \cup B \cup C\rvert = \lvert A\rvert + \lvert B\rvert + \lvert C\rvert - \lvert B \cap C\rvert - \lvert A \cap C\rvert$. Ja, ty också $A \cap B \cap C = \emptyset$ (inklusion och exklusion). | X | |

**2a)** (1p) Beräkna $\binom{6}{4}$.

**Lösning:**
$\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2} = 15$. **Svar:** $\boldsymbol{\binom{6}{4} = 15}$.

**b)** (1p) Redogör för pigeonhole principen (postfacksprincipen).

**Lösning:**
”Om $k$ föremål fördelas i $n$ lådor, $k > n$, får minst en låda minst två föremål.”,
”Om $k > n$ finns ingen injektion från en $k$-mängd till en $n$-mängd.” e.dyl.

**c)** (1p) Ange $S(6,4)$.

**Lösning:**
Med rekursionen för stirlingtalen,

$$\begin{cases} S(n,k) = S(n-1,k-1) + k\,S(n-1,k), & 1 < k < n \\ S(n,1) = S(n,n) = 1, \end{cases}$$

fås ”Stirlings triangel”:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 1 & \\
 & & 7 & & 6 & & 1 \\
 & & & 25 & & 10 & \\
 & & & & \mathbf{65} & &
\end{array}$$

I fetstil står **svaret:** $\boldsymbol{S(6,4) = 65}$.

**3)** (3p) Sjutton identiska bullar fördelas på ett barnkalas så att inget av de tio barnen blir utan. På hur många olika sätt kan detta ske?

---

**Lösning:**

Då alla barn fått varsin bulle, återstår att fördela 7 stycken. Det kan ske på (7 positioner av $9+7=16$ blir bullar, övriga "mellanväggar") $\binom{16}{7} = \frac{16!}{7!9!}$ sätt.
**Svar: På $\binom{16}{7} = \frac{16!}{7!9!}(= 11440)$ sätt.**

---

**4)** (3p) Bestäm antalet sätt mängden $\{1, 2, 3, \ldots, 12\}$ kan delas in i tre olika delmängder så att elementen 1, 2 och 3 hamnar i olika delmängder.

---

**Lösning:**

Det sökta antalet = antalet sätt att till var och en av $4, 5, \ldots, 12$ ordna den av $1, 2, 3$ som de skall vara i delmängd med, dvs = antalet funktioner från 9-mängden $\{4, 5, \ldots, 12\}$ till 3-mängden $\{1, 2, 3\}$, dvs $3^9$ sätt.
**Svar: På $3^9(= 19683)$ sätt.**

---

**5)** (3p) Bestäm antalet tal mellan 1 och 900 som inte är delbara med något av talen 4 och 5.

---

**Lösning:**

Låt $A$ vara $\{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 900,\ 4 \mid x\}$, mängden av heltal mellan 1 och 900 som är delbara med 4 och motsvarande $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x \leq 900,\ 5 \mid x\}$ de som är delbara med 5.
Vi söker antalet tal mellan 1 och 900 som inte ligger i $A \cup B$, dvs $900 - |A \cup B|$, vilket enligt principen om inklusion och exklusion är $900 - |A| - |B| + |A \cap B|$. Här är $|A|$, antalet tal mellan 1 och 900 som är delbara med 4, $\frac{900}{4} = 225$ (vart fjärde tal är delbart med 4). På samma sätt är $|B| = \frac{900}{5} = 180$ och $|A \cap B| = \frac{900}{20} = 45$ (både i $A$ och $B$ ligger precis tal som är delbara med 4 och 5, dvs med 20). Så det sökta antalet blir $900 - 225 - 180 + 45 = 540$.
**Svar: 540 tal mellan 1 och 900 är varken delbara med 4 eller med 5.**

---