Svar och lösningsförslag till ks2, 20 mars 2007,
i 5B1118 Diskret matematik för CL2 och CL3

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p. Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke–negativa heltal.)

		sant	falskt
a)	Om A och B är **oberoende** händelser gäller säkert för sannolikheterna att $P(A \text{ och } B) = P(A) \cdot P(B)$. [Ja, enligt definitionen av oberoende.]	×	
b)	Antalet delmängder av storlek 12 till en mängd med 19 element är $\frac{1}{7} \cdot \frac{19!}{12!}$ [Nej de är $\genfrac{}{}{0pt}{}{19}{12} = \frac{19!}{12!7!}$ st.]		×
c)	Antalet "ord" som kan bildas av bokstäverna (varje använd precis en gång) i ordet "vedervärdig" är $\frac{11!}{16}$. [Ja, det finns $\genfrac{}{}{0pt}{}{11}{2,2,1,1,2,2,1} = \frac{11!}{2!2!2!2!}$ st.]	×	
d)	Antalet (x_1, x_2, x_3), alla x_i naturliga tal, så att $x_1 + x_2 + x_3 = 126$ är $\frac{128 \cdot 127}{2}$. [Javisst, de är $\genfrac{}{}{0pt}{}{126+3-1}{3-1}$ st.]	×	
e)	En mängd med 6 element kan delas upp i 3 icke-tomma delar på 90 olika sätt. [Ja, stirlingtalet $S(6,3) = 90$.]	×	
f)	Om A, B, C är ändliga mängder gäller $\lvert A \cup B \cup C\rvert = \lvert A\rvert + \lvert B\rvert + \lvert C\rvert - \lvert A \cap B \cap C\rvert + \lvert A \cap B\rvert + \lvert B \cap C\rvert + \lvert A \cap C\rvert$. [Nej, tecknen är fel.]		×

2a) (1p) Ange värdet för multinomialtalet $\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m}$, där $k_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} k_i = n$. Svaret får innehålla fakulteter och de fyra räknesätten.

Lösning:

Enligt ett känt uttryck gäller $\boldsymbol{\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_m!}}$.

b) (1p) Visa att det bland 9 olika heltal n_i, alla med $1 \leq n_i \leq 100$, måste finnas två vars skillnad är ett jämnt tal som är mindre än eller lika med 24.

Lösning:

Postfacksprincipen. Dela in talen i 8 delmängder: Udda 1–23, 25–49, 51–75, 77–99 och jämna 2–24, 26–50, 52–74, 76–100. I någon av dem finns minst två av n_i:na, de är de önskade.

c) (1p) Hur många **strängt växande** funktioner $f : \{1, 2, \ldots, 15\} \to \{1, 2, \ldots, 40\}$ finns det? f är som bekant strängt växande precis om $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

Lösning:

Eftersom f är injektiv ($x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$) har dess värdemängd precis 15 element. Omvänt är varje 15-delmängd till $\{1, 2, \ldots, 40\}$ värdemängd till precis en strängt växande funktion ($f(1) =$ det minsta talet, $f(2) =$ nästa, etc). Det sökta antalet är alltså lika med antalet 15-delmängder till en 40-mängd, dvs $\boldsymbol{\binom{40}{15} = \frac{40!}{15!25!}}$ **st.**

3) (3p) Anna och Bertil slumpar varsitt tal. Vad är sannolikheten att summan av deras tal är minst 7, om Annas tal är likafördelat i $\{1, 2, 6\}$, Bertils likafördelat i $\{2, 4, 6\}$ och deras tal är oberoende?

Lösning:

Likafördelning och oberoende ger att varje utfall (par av tal) är lika sannolikt (vardera med sannolikhet $\frac{1}{9}$). Man ser att följande 5 utfall ger en summa som är minst 7: $(1, 6), (2, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)$, medan övriga 4 ger lägre summor. Så, **svar: Den sökta sannolikheten är $\mathbf{\frac{5}{9}}$.**

---

4) (3p) På hur många sätt kan korten i en kortlek med 52 kort ordnas, om hjärter dam och spader kung inte får ligga intill varandra? Svaret får innehålla fakulteter och de fyra räknesätten.

Lösning:

Det sökta antalet ordningar, där hjärter dam och spader kung inte ligger intill varandra, är lika med totala antalet sätt att ordna korten minus antalet där de ligger intill varandra.

Totala antalet ordningar är 52!, medan antalet ordningar där de två ligger ihop kan beräknas som $2\cdot$ (de två kan ligga i 2 olika ordningar) antalet ordningar av en lek med 51 kort (de två ”sitter ihop”). Antalet blir alltså $52! - 2 \cdot 51! = (52 - 2)51! = 50 \cdot 51!$, så **Svar: Det sökta antalet är $\mathbf{50 \cdot 51!}$.**

---

5) (3p) 30 personer väntar för att få göra ett matematiktest. När lokalen öppnas får 5 stycken komma in och göra testet, medan 5 andra får ställa sig i kö.

På hur många olika sätt kan detta ske, dvs på hur många sätt kan kön och gruppen insläppta bildas bland de väntande?

Lösning:

De 5 insläppta kan väljas ut på $\binom{30}{5}$ sätt och bland de återstående 25 kan de 5 i kön väljas på $\binom{25}{5}$ sätt och sedan ordnas på 5! sätt. Totalt ger det (multiplikationsprincipen) $\binom{30}{5}\binom{25}{5}5! = \frac{30!}{5!25!}\frac{25!}{5!20!}5! = \frac{30!}{5!20!}$ sätt, så **svar: På $\mathbf{\frac{30!}{5!20!}}$ sätt.**
Alternativt kan resultatet fås som $\binom{30}{20,5,1,1,1,1,1}$, de 30 fördelas på ”lådorna” kvar utanför (20 st), insläppta (5 st), först i kön (1), andra i kön (1) etc.