Svar och lösningsförslag till extra-ks3, 23 maj 2007,
i 5B1118 Diskret matematik för CL2, CL3 och Media1

1) (För varje delfråga ger rätt svar $\frac{1}{2}$p, inget svar 0p, fel svar $-\frac{1}{2}$p. Totalpoängen på uppgiften rundas av uppåt till närmaste icke-negativa heltal.)

		sant	**falskt**
a)	Om de ändliga grupperna G_1 och G_2 är isomorfa så är de lika stora. Ja, isomorfin är en bijektion mellan dem.	X	
b)	Två grupper som är lika stora är alltid isomorfa. Nej, t.ex. S_3 och $(\mathbb{Z}_6,+)$ är lika stora, men inte isomorfa.		X
c)	Sidoklasser till en och samma delgrupp H till en grupp G är lika stora. Ja, de är båda lika stora som H.	X	
d)	Varje grupp har minst en cyklisk delgrupp. Ja, varje element genererar en cyklisk delgrupp.	X	
e)	Lagranges sats säger att om H delgrupp till G så gäller att talet $\|H\|$ delar talet $\|G\|$. Ja, faktiskt.	X	
f)	Om elementet g i en grupp G med gruppoperationen $\circ$ har ordning 20 så har elementet $g \circ g$ ordning 10. Ja, $(g \circ g)^k = e$ för $k = 10$, men inte för mindre $k > 0$.	X	

2a) (1p) Betrakta en grupp G med operationstabellen

$$\begin{array}{c|ccccc} \circ & a & b & c & d & f \\ \hline a & a & b & c & d & f \\ b & b & c & d & f & a \\ c & c & d & f & a & b \\ d & d & f & a & b & c \\ f & f & a & b & c & d \end{array}$$

Bestäm ett element x i G sådant att $bxd = c$.

Lösning:

Eftersom $bb = c$, gäller $bxd = c$ omm $xd = b$ (multiplicera med b^{-1} från vänster). Men $dd = b$, så $xd = b$ omm $x = d$, p.s.s.

Svar: $\boldsymbol{x = d}$.

---

b) (1p) Skriv nedanstående permutation φ som en produkt av disjunkta cykler:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 6 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Lösning:

Eftersom $\varphi(1) = 2, \varphi(2) = 3, \varphi(3) = 5, \varphi(5) = 6$ o.s.v., får man

svaret: $\boldsymbol{\varphi}$ ges av $\mathbf{(1\,2\,3\,5\,6)(4\,7)(8)}$.

---

c) (1p) Gruppen $(Z_3,+)$ är isomorf med vidstående grupp. Ange en isomorfi mellan grupperna:

$$\begin{array}{c|ccc} \circ & e & a & b \\ \hline e & e & a & b \\ a & a & b & e \\ b & b & e & a \end{array}$$

Lösning:

Identitetselementen motsvarar varandra och i detta fall ser man att strukturen bevaras hur man än fortsätter bijektionen, så

svar: $\boldsymbol{\varphi(0) = e}$ och $\boldsymbol{\varphi(1) = a, \varphi(2) = b}$ eller $\boldsymbol{\varphi(1) = b, \varphi(2) = a}$.

3) (3p) Betrakta gruppen $(Z_{13} \setminus \{0\}, \cdot)$. Avgör om denna grupp genereras av elementet 2.

Lösning:

Frågan är om varje element i $Z_{13} \setminus \{0\}$ kan skrivas som 2^n, något n.

Man finner

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^n	2	4	8	3	6	12	11	9	5	10	7	1

och eftersom alla element i gruppen finns med på andra raden,

svar: Ja, $Z_{13} \setminus \{0\}$ genereras av elementet 2.

---

4) (3p) Låt $\varphi = (1\ 3\ 2\ 4\ 5)$ och $\gamma = (1\ 2\ 5)(3\ 4)$ vara permutationer på mängden $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Bestäm ordningen av elementet $\varphi\gamma^2$.

Lösning:

$\gamma^2 = (1\ 2\ 5)(3\ 4)(1\ 2\ 5)(3\ 4) = (1\ 5\ 2)(3)(4)$,

så $\varphi\gamma^2 = (1\ 3\ 2\ 4\ 5)(1\ 5\ 2)(3)(4) = (1)(2\ 3)(4\ 5)$.

Permutationens ordning är minsta gemensamma multipeln till cykellängderna, så **svar: $\varphi\gamma^2$:s ordning är 2.**

---

5) (3p) Bestäm en delgrupp med tre element till den grupp G som har vidstående operationstabell (multiplikationstabell):

$\circ$	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	b	c	d	f	e
b	b	c	d	f	e	a
c	c	d	f	e	a	b
d	d	f	e	a	b	c
f	f	e	a	b	c	d

Lösning:

Man kan betrakta tabellen tills man hittar en mängd med 3 element som inkluderar e och är sluten under $\circ$.

Mer systematiskt kan man notera att a har ordning 6 och således $aa = b$ ordning 3. b genererar alltså en delgrupp med tre element. $b^2 = d$, så

svar: $\{e, b, d\}$ är en delgrupp av ordning tre till G.
